אלגברה לא קומוטטיבית - תרגול 1

9 במרץ 2015

1 חוגים - תזכורת

חוג R זו חבורה אבלית עם פונקציית מכפלה $R \times R \to R$ שמסומנת ע"י $xy \mapsto (x,y)$ ואיבר $1_R \in R$ שמקיימים:

1. (קיבוץ) לכל $x,y,z \in R$ מתקיים $(xy)\,z = x\,(yz)$.
2. (פילוג) לכל $x,y,z \in R$ מתקיים
$$x\,(y+z) = xy + xz$$
$$(x+y)\,z = xz + yz$$
כלומר, פונקציית המכפלה היא בי-לינארית.
3. (יחידה) לכל $x \in R$ מתקיים $1_R \cdot x = x \cdot 1_R$.

אם בנוסף מתקיים שלכל $x,y \in R$ מתקיים $xy = yx$, אז R נקרא קומוטטיבי ואחרת לא קומוטטיבי. הומומורפיזם של חוגים זו פונקציה $f : R \to S$ שמקיימת

1. f הומומורפיזם של חבורות אבליות.
2. לכל $x,y \in R$ מתקיים $f\,(xy) = f\,(x)\,f\,(y)$.
3. $f\,(1_R) = 1_S$.

2 מודולים

מודול (שמאלי) מעל חוג R, זו חבורה אבלית M עם פונקציה $R \times M \to M$ שמסומנת ע"י $rm \mapsto (r,m)$ שמקיימת

1. לכל $m,n \in M$ ולכל $r \in R$ מתקיים:
$$r\,(m+n) = rm + rn$$
2. לכל $m \in M$ ולכל $r,s \in R$ מתקיים:
$$s\,(rm) = (sr)\,m$$

3. לכל $m \in M$ מתקיים

$$1 \cdot m = m$$

אפשר לחשוב על מודול כעל פעולה של חוג על חבורה אבלית שהיא הגרסא הלינארית של פעולה של חבורה על קבוצה ובדומה לכך, מבנה של R־מודול על חבורה אבלית M, שקול להומומורפיזם של חוגים $R \to End\left(M\right)$ כאשר $End(M)$ חוג עם סכום איבר איבר וכפל שנתון ע"י הרכבה.

הומומורפיזם של R־מודולים זו פונקציה $f : M \to N$ שמקיימת:

1. f הומומורפיזם של חבורות אבליות.
2. לכל $r \in R$ ו־$m \in M$ מתקיים $f\left(rm\right) = rf\left(m\right)$.

דוגמאות:

1. כל חוג R הוא מודול מעל עצמו באופן טבעי.
2. כל אידאל שמאלי $I \subseteq R$ הוא מודול (שמאלי) של R וגם המנה R/I היא מודול שמאלי מעל R.
3. לכל חוג R ולכל $n \in \mathbb{N}$, ישנו מודול חופשי

$$R^n = R \oplus R \oplus \cdots \oplus R = R \times R \times \cdots \times R$$

של n־יות של איברים ב־R עם פעולות איבר־איבר.

4. עבור $R = \mathbb{Z}$, לכל חבורה אבלית A יש מבנה יחיד של מודול מעל $\mathbb{Z}$ כאשר עבור $n \geq 0$ מתקיים

$$na = \begin{cases} \overbrace{a + a + ... + a}^{n} & n \geq 0 \\ \left(-n\right) a & n < 0 \end{cases}$$

הומומורפיזם של חבורות אבליות הוא אוטומטית הומומורפיזם שלהן כמודולים מעל $\mathbb{Z}$. לכן, מודולים מעל $\mathbb{Z}$ זה אותו הדבר כמו חבורות אבליות. בפרט, $\mathbb{Z}/n$ הוא מודול מעל $\mathbb{Z}$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

5. עבור $R = k$ שדה, מודול מעל k זה פשוט מרחב וקטורי מעל k והומומורפיזם של מודולים מעל k זו העתקה לינארית.
6. עבור חוג פולינומים מעל שדה $R = k\left[x\right]$, מודול זה מרחב וקטורי V מעל k עם העתקה לינארית $T_V : V \to V$ שמתאימה לפעולה של x. הומומורפיזם של מודולים כנ"ל $\left(V, T_V\right) \to \left(W, T_W\right)$ זו העתקה לינארית $S : V \to W$ שמקיימת

$$S \circ T_V = T_W \circ S$$

7. עבור שדה k, המרחב הוקטורי $V = k^n$ הוא גם מודול מעל חוג המטריצות $R = M_n\left(k\right)$ שהוא לא קומוטטיבי. ההומומורפיזם $V \to V$ של $M_n\left(k\right)$־מודולים הם בדיוק כפל בסקלר $\lambda \in k$.

תת־מודול שמאלי של R כמודול מעל עצמו זה בדיוק אידאל שמאלי של R.

משפטי איזומורפיזם:

1. לכל הומומורפיזם של מודולים $f : M \to N$, מתקיים ש-$\ker f$ ו-$\operatorname{Im} f$ הם תת־מודולים של M ו-N בהתאמה ויש איזומורפיזם טבעי $M/\ker f \xrightarrow{\sim} \operatorname{Im} f$.
2. לכל שני תת־מודולים $N, L \subseteq M$ יש איזומורפיזם טבעי

$$N/\left(N \cap L\right) \xrightarrow{\sim} \left(N + L\right)/L$$

3. לכל סידרת הכלות $L \subseteq N \subseteq M$ יש איזומורפזים טבעי

$$(M/L)\,/\,(N/L) \xrightarrow{\sim} M/N$$

4. עבור מודולסי $L \subseteq M$, מנה ב-L נותנת התאמה חח"ע ועל בין תת־מודולים של M/L ותת־מודולים של M שמכילים את L.

בדומה למרחבים וקטורים, אנחנו יכולחים לדבר על צרופים לינארים ותלויות לינאריות בכל מודול. לכל קבוצת איברים $S \subseteq M$ ישנו המודול המינימלי שמכיל אותה. זהו המודול שנוצר/נפרש ע"י S. מודול נקרא נוצר סופית אם יש לו תת־קבוצה סופית שפורשת אותו. באופן דומה, בהינתן סידרה של איברים $x_1, x_2, \ldots, x_n \in M$. תלות לינארית נתונה ע"י סידרה $r_1, r_2, ..., r_n \in R$ שמקיימת

$$r_1x_1 + r_2x_2 + ... + r_nx_n = 0$$

בניגוד למרחבים וקטורים, לא לכל מודול נוצר סופית יש בסיס (= קבוצה פורשת ובת"ל). למשל במודול $\mathbb{Z}/n$ כל איבר x מקיים תלות לינארית $nx = 0$. מודול M שיש לו בסיס בגודל n נקרא חופשי והוא איזומורפי למודול R^n. עבור בסיס אינסופי $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$, המודול איזומורפי למודול $R^{\oplus I}$ (ולא ל-R^I).

3 תנאי סופיות

3.1 נתריות וארטיניות

הגדרה: יהי R חוג ו־M מודול מעל R.

1. נאמר ש־M נתרי או מקיים את תנאי השרשרת העולה, אם כל סידרה עולה של תת־מודולים של M מתייצבת. כלומר, לכל סידרה אינסופית עולה

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq ...$$

של תת־מודולים של M, קיים n עבורו $M_i = M_{i+1}$ לכל $i \geq n$.

2. נאמר ש־M ארטיני או מקיים את תנאי השרשרת היורדת, אם כל סידרה יורדת של תת־מודולים של M מתייצבת. כלומר, לכל סידרה אינסופית יורדת

$$M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq ...$$

של תת־מודולים של M, קיים n עבורו $M_i = M_{i+1}$ לכל $i \geq n$.

באופן כללי, אף אחד מהתנאים הללו לא גורר את השני. חוג נקא נתרי/אריטיני (שמאלי) אם הוא נתרי/ארטיני כמודול (שמאלי) מעל עצמו.

דוגמאות:

1. עבור $R = k$ שדה, מודול הוא כאמור מרחב וקטורי V מעל k. ו־V הוא נתרי אם ורק אם הוא ארטיני אם ורק אם הוא ממימד סופי.

2. עבור $R = \mathbb{Z}$, מודול הוא חבורה אבלית. תת־מודולים של $\mathbb{Z}$ עצמו הם אידאלים והם כולם מהצורה (n) לאיזשהו $n \in \mathbb{N}$. מתקיים $(n) \subseteq (m)$ אם ורק אם $m \mid n$. לכן, סידרה אינסופית עולה של אידאלים מתאימה לסידרה יורדת בחלוקה של מספרים טבעיים וברור שסידרה כזאת חייבת להתייצב. לכן $\mathbb{Z}$ מודול (חוג) נתרי. מצד שני, ב־$\mathbb{Z}$ יש סדרות אינסופיות יורדות של אידלים כמו

$$(2) \supseteq (4) \supseteq (8) \supseteq ...$$

שלא מתייצבות ולכן $\mathbb{Z}$ איננו מודול (חוג) ארטיני.

3. תהי $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right] \subseteq \mathbb{Q}$ התת־חבורה של כל השברים שהמכנה שלהם הוא חזקה של p. החבורה $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]/\mathbb{Z}$ היא ארטינית ולא נתרית.

טענה: יהי M מודול.

1. M נתרי אם ורק אם לכל משפחה לא ריקה (M_α) של תת־מוודלים של M יש איבר מקסימלי.
2. M נתרי אם ורק אם לכל משפחה לא ריקה (M_α) של תת־מוודלים של M יש איבר מינימלי.

הוכחה: נוכיח את (1). ההוכחה של (2) אנלוגית. אם M נתרי ו-(M_α) משפחה של תת־מודולים, נמצא לה איבר מקסימלי באופן הבא. יהי M_0 מודול כלשהו במשפחה. אם הוא מקסימלי, סיימנו. אחרת, יהי $M_0 \subsetneq M_1$ מודול גדול ממש. אם הוא מקסימלי, סיימנו. אם לא, נבחר $M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2$ וכן הלאה. התהליך חייב להעצר אחרת נקבל סידרה אינסופית עולה לא מתייצבת בסתירה לנתריות. הכיוון ההפוך אפילו יותר קל. לכל סידרה עולה $M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq ...$, למשפחה (M_n) יש איבר מקסימלי ולכן היא מתייצבת.

טענה: יהי M מודול, $M' \subseteq M$ תת־מודול ו-$M'' = M/M'$ מודול המנה. אם שניים מבין שלשת המודולים M, M', M'' הם נתריים (ארטיניים) אז גם השלישי. כלומר, התנאיים נתריות/ארטיניות סגורים תחת לקיחת תת־אובייקטים, מנות והרחבות.

הוכחה: נוכיח את הטענה עבור נתריות. ההוכחה עבור ארטיניות היא אנלוגית לחלוטין. אם M נתרי, אז ברור ש-M' נתרי כי כל סידרה עולה של תת־מודולים של M' היא גם תת־סידרה עולה של תת־מודולים של M ולכן מתייצבת. באופן דומה, כל סידרה עולה של תת־מודולים של M/M' ניתן להרים לסידרה עולה של מודולים ב־M שמכילים את M' ולכן סידרה זו מתייצבת ונשארת יציבה אם מחלקים אותם ב-M'. כעת, נניח ש-M' ו-M'' נתרים ותהי

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq ...$$

סידרה עולה של תת־מוולדים של M. נסמן

$$M_n' = M_n \cap M'$$

$$M_n'' = M_n + M'$$

אנחנו יודעים שהשתי הסדרות הללו מתייצבות החל מאיזשהו n. נראה שהחל מ-n זה, גם הסידרה המקורית מתייצבת. עבור $i \geq n$, יהי $m_{i+1} \in M_{i+1}$. מכיוון שמתקיים

$$M_{i+1} + M' = M_i + M'$$

אפשר לכתוב $m_{i+1} = m_i + m'$. כעת,

$$m_{i+1} - m_i = m' \in M_{i+1} \cap M' = M_i \cap M'$$

ולכן $m' \in M_i$ ובסה"כ קיבלנו $m_{i+1} = m_i + m' \in M_i$ והסידרה מתייצבת.

מסקנה: יהי M מודול עם סינון סופי

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_n = M$$

M נתרי (ארטיני) אסם כל המנות העוקבות M_{k+1}/M_k הן נתריות (ארטיניות)

הוכחה: מוכיחים ש-M_k נתרי (ארטיני) באינדוקציה על הטענה הקודמת.

למודולים נתריים יש אפיון חשוב נוסף:

טענה: M נתרי אם ורק אם כל תת־מודול שלו הוא נוצר סופית.

הוכחה: בכיוון אחד נסתכל על משפחת תת־המודולים הנוצרים סופית של M ונקח לה איבר מקסימלי. בכיוון ההפוך, בהינתן סידרה עולה

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq ...$$

נקח את האיחוד העולה $N = \bigcup_n M_n$. מההנחה, N נוצר ע"י מספר סופי של איברים $x_1, ..., x_l$ ולכן ישנו n עבורו $x_1, ..., x_l \in M_n$ ומשם הסידרה חייבת להתייצב.

הערה: בניגוד למרחבים וקטורים, יכול להיות מודול נוצר סופית עם תת־מודול לא נוצר סופית. למשל חוג הפולינומים באינסוף משתנים מעל שדה $R = k\left[x_1, x_2, ...\right]$ והאידאל $I = (x_1, x_2, x_3, ...)$.

3.2 אורך וסדרות הרכב

סידרת הרכב של מודול M היא סידרה של תת־מודולים

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_n = M$$

שלא ניתן לעדן. כלומר, גורמי ההרכב M_n/M_{n+1} הינו מודול פשוט. מודול שיש לו סידרת הרכב נקרא בעל אורך סופי.

טענה: מודול M הוא בעל אורך סופי אם ורק אם הוא נתרי וארטיני.

הוכחה: אם M בעל אורך סופי אז הוא נתרי וארטיני מכיוון שמודולים פשוטים הם נתרים וארטינים והתכונות הללו נשמרות בהרחבות. בכיוון ההפוך, אם M נתרי וארטיני. נגדיר סידרה עולה של תת־מוודלים של M באינדוקציה. $M_0 = 0$ ו-M_{n+1} הוא תת־מודול מינמלי מבין התת־מודולים של M שמכילים את M_n ממש (יש כזה מארטיניות). כעת, קבלנו סידרה עולה ממש של תת־מודולים של M ומנתריות היא חייבת להעצר. מההגדרה היא נעצקת כאשר הגענו ל-$M_n = M$ וקיבלנו סידרת הרכב של M.

למרות שלמודול יכולות להיות הרבה סדרות הרכב, יש לנו את האנלוג של המשפט המוכר מחבורות:

משפט ג'ורן הולדר: אם M בעל אורך סופי אז,

1. כל סידרה של תת־מודולים ב-M ניתן לעדן לסידרת הרכב.
2. כל שתי סדרות הרכב של M הן בעלות אותו אורך ויש להן את אותה קבוצה של גורמי הרכב עד כדי איזומורפיזם וסדר.

הוכחה: כמו בחבורות.

זה מאפשר לנו להגדיר את האורך של מודול M בתור האורך של סידרת הרכב שלו אם יש ואינסוף אחרת. האורך מסומן $\ell(M)$.

טענה: האורך הוא אדיטיב. כלומר, אם יש לנו מודול M, תת־מודול M' ומודל מנה $M'' = M/M'$, אז מתקיים

$$\ell(M) = \ell(M') + \ell(M'')$$

הוכחה: אם נקח סידרת הרכב ל-M' ונמשיך אותה עם הרמה של סידרת הרכב של M'', נקבל סידרת הרכב ל-M.