אינפי מתקדם 1 תשס"א תרגיל 7

14 בדצמבר 2000

1. תהי $f:R^2\to R$ $f(x,y)=\begin{cases}0 & (x,y)=(0,0)\\ \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$. הוכיחו ש $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ קימות בכל R^2 אבל f אינה רציפה באפס, ולכן גם לא גזירה שם.

ב. תהי $f:E\subseteq R^n\to R$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ חסומות ב E אז f רציפה .

ג. למה אין בזה סתירה עם סעיף א?

2. $f:U\to R$ $U\subseteq R^n$ פתוחה, מקבלת מקסימום (מינימום) מקומי ב $a\in U$ אזי $f'(a)=(\nabla f)(a)=0$.

ב. מבין תיבות ישרות בעלות שטח פנים נתון מצאו תיבה עם נפח מקסימלי. הוכיחו שזהו אכן מקסימום.

3. הראו שלא ניתן להכליל את משפט ערך הממוצע למימדים גבוהים $R^n;n>1$ רמז $f:R\to R^2; f(x)=(\cos x,sinx)$.

4. תהינה $f_i(x):R\to R$ $1\le i\le n$, $f(x_1,\ldots,x_{n+1}):R^{n+1}\to R$,

$g(x):R\to R^{n+1}$ $g(x)=(f_1(x),\ldots,f_n(x),x)$

נביט ב $H(x)=f(g(x)):R\to R$ הוכיחו כי

$\frac{dH}{dx}=\Sigma_{i=1}^n\frac{df_i}{dx}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_i}|_{g(x)}+\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}|_{g(x)}$

ב. חשבו זאת עבור $f_i(x)=x^n$ ו $f(x_1,\ldots,x_{n+1})=\Sigma_{i=1}^n x_i$

5. $f:B(0,1)\subseteq R^2$ $B(0,1)\to R$ אם $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ בכדור אז f אינה תלויה ב x ז"א קימת $g(x):R\to R$ כך ש $g(y)=f(x,y)$.

ב. מצאו קבוצה ופונקציה כנ"ל כך ש f כן תלויה ב x .

6. הראו שאם $f:R^n\to R^m$ ו $Df=0$ אזי f קבועה.

בהצלחה.