

אינפי מתקדם 1 תשס"א תרגיל 5

27 בנובמבר 2000

1. נגדיר שתי מטריקות על R : $d(x, y) = |x - y|$, $\rho(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$. יש להוכיח שהמטריקות שקולות (סדרה מתכנסת בשתי המטריקות בו זמנית), אבל (R, ρ) שלם, בעוד ש (R, d) אינו שלם (סדרת קושי).
- ב. האם תתכנה שתי מטריקות שקולות d_1, d_2 על X כך ש (X, d_1) קומפקטי ו (X, d_2) לא?
2. מהו התנאי שמרחב מטרי דיסקרטי יהיה ספירבילי?
3. הוכיחו שלכל $a > 0$ לפונקציה $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$ יש נקודת שבת והיא פתרון של $g(x) = 0$ כאשר $g(x) = x^2 - a$. הציעו דרך לחישוב מקורב של $\sqrt{3}$. (קרום לפתרון: מצאו קבוצה בה f מכוצת וכו')
4. מרחב מטרי (X, d) יקרא חסום בהחלט אם לכל $\epsilon > 0$ יש קבוצה סופית $F \subseteq X$ כך ש $X = \bigcup_{p \in F} B(p, \epsilon)$ (כל קבוצה ϵ מופרדת ב X סופית). הוכיחו שאם (X, d) חסום בהחלט ושלם אזי (X, d) קומפקטי.
- (בחרו תנאי קומפ', הבינו את תנאי "חסום בהחלט", קחו סדרה יורדת של ϵ , "קימת קבוצה שמכילה ∞ "., נמשיך באינדוקציה... להשתמש בשלמות.)
5. (X, d) מרחב מטרי. $T : X \rightarrow X$ העתקה המקימת לכל $x \neq y$, $d(Tx, Ty) < d(x, y)$.
 א. התנו דוגמה ל (X, d) שלם ו T כנ"ל ללא נקודת שבת.
 ב. תנו דוגמה ל (X, d) קומפקטי ו T כנ"ל עם $\sup_{x \neq y} \frac{d(Tx, Ty)}{d(x, y)} = 1$.
 ג. הוכיחו שאם (X, d) קומפקטי ו T כנ"ל אזי ל T יש נקודת שבת אחת ויחידה. (הוכיחו שהקב' $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ כוללת נקודה אחת. $K_0 = X$, $K_{n+1} = T(K_n)$)
 6. הראו שכל הנורמות ב R^n שקולות. (הראו שכל נורמה שקולה לנורמת l_2 . ע"י בהצלחה.)
 $Md_2(x, y) \leq d(x, y) \leq md_2(x, y)$ צד אחד פשוט צד שני קומפ')