

פרק ג' (35%)

ענו על כל השאלות. בכל שאלה יש לסמן תשובה נכונה אחת בלבד בטופס הנלווה.

1. תהי $g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה, ונגדיר פונקציה $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ע"י

$$f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$$

איזו מן הטענות הבאות לא נכונה?

א. f דיפרנציאבילית ב- $(1, 1) \Leftrightarrow g'(\sqrt{2}) = 0$

ד. f דיפרנציאבילית ב- $(0, 0) \Leftrightarrow g'(0) = 0$

ג. g רציפה ב- $[0, \infty) \Leftrightarrow f$ רציפה בכל \mathbb{R}^2

ד. g גזירה ב- $\sqrt{2} \Leftrightarrow f$ דיפרנציאבילית ב- $(1, 1)$

2. ערך הגבול $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{3x} e^{-t^2} dt}{\sin x}$ הוא:

א. 4

ב. $3e^{-9} + e^{-1}$

ג. $3e^{-9} - e^{-1}$

ד. 1

3. איזה מהפסוקים הבאים שקול להתכנסות במ"ש של $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ל- f על התחום

? D

א. $\forall x_0 \in D, \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\limsup_n |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$

ב. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$

ג. $\forall x_0 \in D, \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) = f(x_0)$

ד. $\forall x_0 \in D, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right) = f(x_0)$

4. הערך של $\int_2^3 \frac{1}{(x-1)(x-5)} dx$ הוא :

א. $\ln\left(\frac{3}{4}\right)$

ב. $\frac{1}{4}\ln 3$

ג. $-\frac{1}{4}\ln 3$

ד. $-\ln\left(\frac{3}{4}\right)$

5. נגדיר פונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ע"י

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{7}{3}} \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

נתבונן בטענות הבאות:

(i) קיים פולינום P ממעלה לכל היותר 2 כך ש- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - P(x)}{x^2} = 0$

(ii) $f''(0)$ קיים.

איזו מן הטענות הבאות נכונה?

- א. (ii) נכונה ו- (i) לא נכונה.
- ב. (i) ו- (ii) שתיהן לא נכונות.
- ג. (i) ו- (ii) נכונות שתיהן.
- ד. (i) נכונה ו- (ii) לא נכונה.

6. תהי f בעלת נגזרות מסדר כלשהו בקטע I . נסמן ב- $P_n(x)$ את פולינום

טיילור מסדר n של f סביב a וב- $R_n(x)$ את השארית:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

נתבונן בטענות:

(i) הסדרה $(|R_n(x)|)_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית ושואפת לאפס, לכל $x \in I$.

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ לכל $x \in I$.

(iii) $\lim_{x \rightarrow a} R_n(x) = 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

איזו מן הטענות הבאות נכונה?

- א. אם (ii) ו-(iii) נכונות אז (i) נכונה.
- ב. אם (i) לא נכונה אז (iii) לא נכונה.
- ג. יתכן ש-(ii) ו-(iii) נכונות, ו-(i) לא נכונה.
- ד. יתכן ש-(iii) לא נכונה ו-(ii) נכונה.

7. תהי $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ואי-שלילית. נתונות הטענות הבאות:

(i) מתכנס $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ ו- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ מתכנס $\int_0^{\infty} f(x) dx$.

(ii) מתכנס $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ ו- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ מתכנס $\int_0^{\infty} f(x) dx$.

(iii) מתכנס $\int_0^{\infty} f(x) dx$ ו- מתכנס $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ ו- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

- א. רק טענה (iii) איננה נכונה.
- ב. שלוש הטענות נכונות.
- ג. אף אחת משלוש הטענות הנ"ל איננה נכונה.
- ד. רק טענה (iii) נכונה.