נגזרות של פונקציות של כמה משתנים

* $f: U_{\subset \mathbb{R}^m} \longrightarrow \mathbb{R}$
* "נקודה" $\underline{x}^0 \in \mathring{U}$ פנים של U — לכן קיימת סביבה של $\underline{x}^0$ מוכלת ב- U
* "כיוון" $\underline{e} \in \mathbb{R}^m$

$\Longleftarrow$

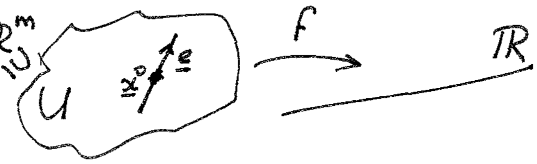
$$\phi : \left(\text{סביבה של } 0\right)_{\subset \mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$t \longmapsto f(\underline{x}^0 + t\underline{e})$$

פונקציה מוגדרת בסביבה של 0

אם ϕ גזירה ב- 0 אז אומרים שהנגזרת כיוונית (directional derivative) של f בנקודה $\underline{x}^0$ ובכיוון $\underline{e}$, קיימת

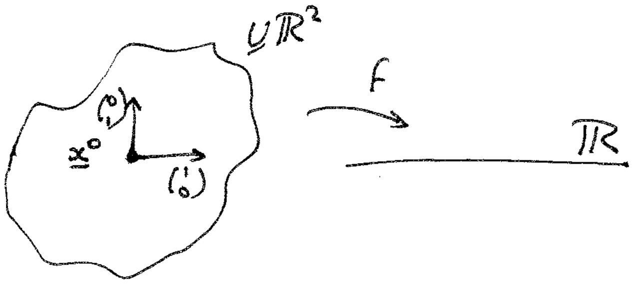
$$\partial_{\underline{e}} f = \phi'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\underline{x}^0 + t\underline{e}) - f(\underline{x}^0)}{t}$$



דוגמאות חשובות: נגזרות חלקיות

$$f_x \equiv \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\underline{x}^0 + t\binom{1}{0}) - f(\underline{x}^0)}{t}$$
נגזרת בכיוון $\binom{1}{0}$

$$f_y \equiv \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\underline{x}^0 + t\binom{0}{1}) - f(\underline{x}^0)}{t}$$
נגזרת בכיוון $\binom{0}{1}$



- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x^0+t, y^0) - f(x^0, y^0)}{t} = \left(\text{נגזרת של } f \text{ כפונקציה של } x \text{ עם } y \text{ קבועה}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x^0, y^0+t) - f(x^0, y^0)}{t} = \left(\text{נגזרת של } f \text{ כפונקציה של } y \text{ עם } x \text{ קבועה}\right)$$

דוגמאות

(א)

פונקציה $f(x,y) = x^2 + 2xy$

נקודה $\underline{x}^0 = (x^0, y^0)$

כיוון $\underline{e} = (a, b)$

$$\phi(t) = f(\underline{x}^0 + t\underline{e})$$
$$= (x^0+ta)^2 + 2(x^0+ta)(y^0+tb)$$
$$= (x^0)^2 + 2x^0y^0 + t(2ax^0 + 2ay^0 + 2bx^0) + t^2(a^2+2ab)$$

$$\partial_{\underline{e}} f = \phi'(0) = 2ax^0 + 2ay^0 + 2bx^0$$

$\underline{e} = \binom{1}{0}$: $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\underline{x}^0} = 2x^0 + 2y^0$

$\underline{e} = \binom{0}{1}$: $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\underline{x}^0} = 2x^0$

(ב)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$f_x(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0$$
$$f_y(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0$$

נגזרות כיווניות בכיוונים אחרים לא קיימות!

$$f(t,t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (t\neq 0) \\ 0 & (t=0) \end{cases}$$

לא רציפה $\Leftarrow$ לא גזירה

$\Leftarrow$ $\partial_{\binom{1}{1}} f$ לא קיימת

(ג)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

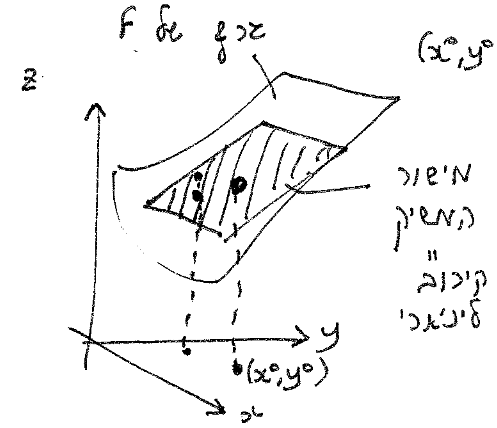
$$f(ta, tb) = t \cdot \frac{a^2 b}{a^2+b^2}$$

$$\partial_{\binom{a}{b}} f = \frac{a^2 b}{a^2+b^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$
בנקודה $(0,0)$

$\uparrow$

f לא דיפרנציאבילית אבל $\partial_{\underline{e}} f$ קיימת בכל כיוון

דיפרנציאביליות של פונקציות $f(x,y)$



"דיפרנציאביליות" $\equiv$ "קיים קירוב ליניארי" ב-(x°,y°)

$\Longleftrightarrow$ בסביבה של (x°,y°), אפשר לכתוב את $f(x,y)$ בצורה:

$$(*)\quad f(x,y) = \underbrace{\underbrace{f(x^\circ,y^\circ)}_{\text{סדר } 0} + \underbrace{A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y}_{\text{סדר ראשון}}}_{\text{מישור המשיק}} + \underbrace{R(\Delta x,\Delta y)}_{\text{שארית}}$$

כאשר
$$\left.\begin{aligned}\Delta x &= x - x^\circ\\ \Delta y &= y - y^\circ\end{aligned}\right\}\ ; \quad \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{R(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = 0$$

וגם A,B קבועים (לא תלוי ב- $\Delta x,\Delta y$)

משפט 1: f דיפרנציאבילית ב-(x°,y°) $\Leftarrow$ f רציפה ב-(x°,y°)

משפט 2: f דיפרנציאבילית ב-(x°,y°) $\Leftarrow$ $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ קיימות ב-(x°,y°)

(תנאי הכרחי)

וגם $A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x^\circ,y^\circ)}, B = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x^\circ,y^\circ)}$

הוכחה: $(*) \overset{\Delta y=0}{\Longleftarrow} f(x,y^\circ) = f(x^\circ,y^\circ) + A\cdot\Delta x + R(\Delta x,0)$ כאשר $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{R(\Delta x,0)}{\Delta x} = 0$

$\Leftarrow \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x,y^\circ)-f(x^\circ,y^\circ)}{\Delta x} = A$

$\Leftarrow \quad f_x|_{(x^\circ,y^\circ)} = A$

□

לא מספיק: $f(x,y) = \begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ $\Leftarrow$ f לא דיפרנציאבילית ב-$(0,0)$ שבה f_x, f_y קיימות

משפט 3:
* $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ קיימות בסביבה של (x°,y°)
* $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ רציפות ב-(x°,y°)

$\Leftarrow$ f דיפרנציאבילית ב-(x°,y°) (תנאי מספיק)

הוכחה:

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= f(x^\circ,y^\circ) + \left(f(x,y^\circ)-f(x^\circ,y^\circ)\right) + \left(f(x,y)-f(x,y^\circ)\right)\\
&= f(x^\circ,y^\circ) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(\xi,y^\circ)}\cdot\Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,\eta)}\cdot\Delta y \qquad \xi\in(x^\circ,x) \quad \eta\in(y^\circ,y)\\
&= f(x^\circ,y^\circ) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x^\circ,y^\circ)}\cdot\Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x^\circ,y^\circ)}\cdot\Delta y + R(\Delta x,\Delta y)
\end{aligned}$$

כאשר
$$\begin{cases} R(\Delta x,\Delta y) = \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(\xi,y^\circ)} - \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x^\circ,y^\circ)}\right)\cdot\Delta x\\ \qquad + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,\eta)} - \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x^\circ,y^\circ)}\right)\cdot\Delta y\end{cases} \xRightarrow[\text{של } f_x,f_y]{\text{רציפות}} \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{R(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = 0$$

□

לא הכרחי: $f(x,y) = \begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq\underline{0}\\ 0 & (x,y)=\underline{0}\end{cases}$ $\Leftarrow$ f דיפרנציאבילית ב-$(0,0)$ $(f = 0 + R(x,y))$
f_x, f_y לא רציפות

דיפרנציאביליות ונגזרות של פונקציות $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

הגדרה * $\underline{f}: \underset{\mathbb{R}^m}{\overset{\cap}{U}} \longrightarrow \mathbb{R}^n$
* $\underline{a} \in U$
* $\underline{e} \in \mathbb{R}^m$

$\Leftarrow$ $\underline{f}$ גזירה בנקודה $\underline{a}$ בכיוון $\underline{e}$
(**הנגזרת הכוונית** של f ב- $\underline{a}$ ובכיוון $\underline{e}$ קיימת)
אומרים $\lim_{h\to 0} \frac{\underline{f}(\underline{a}+h\underline{e})-\underline{f}(\underline{a})}{h} = \frac{d}{dt}(\underline{f}(\underline{a}+t\underline{e}))\Big|_{t=0}$ קיים
נסמן את הנגזרת ב- $(\partial_{\underline{e}} \underline{f})\Big|_{\underline{x}=\underline{a}}$

כאשר $\underline{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ← מקום ה-i-י, נסמן את $(\partial_{\underline{e}} \underline{f})$ ב- $\frac{\partial \underline{f}}{\partial x_i}\Big|_{\underline{x}=\underline{a}}$ **נגזרת חלקית**

$$\equiv \lim_{h\to 0} \frac{\underline{f}(a_1,\dots,a_i+h,\dots,a_m)-\underline{f}(a_1,\dots,a_m)}{h}$$

$\equiv$ (נגזרת של $\underline{f}$ כפונקציה של x_i כאשר $x_j = a_j$ קבועים $(\forall j\neq i)$)

הגדרה * $\underline{f}: \underset{\mathbb{R}^m}{\overset{\cap}{U}} \longrightarrow \mathbb{R}^n$
* $\underline{a} \in U$

$\Leftarrow$ אומרים ש- f דיפרנציאבילית בנקודה $\underline{a}$
אומרים קיימים וקטורים $\underline{A}_1,\dots,\underline{A}_m$ ב- $\mathbb{R}^n$ כך ש-

$$\lim_{\underline{h}\to \underline{0}} \frac{\underline{f}(\underline{a}+\underline{h})-\underline{f}(\underline{a})-\sum_{i=1}^{m} h_i \underline{A}_i}{\|\underline{h}\|} = \underline{0}$$

משפט f דיפרנציאבילית ב- $\underline{a}$ $\Leftarrow$ $\underline{A}_i = \frac{\partial \underline{f}}{\partial x_i}\Big|_{\underline{x}=\underline{a}}$

הגדרה $\underline{f}$ דיפרנציאבילית ב- $\underline{a}$ $\Leftarrow$ **הנגזרת** של f היא $D_{\underline{a}}\underline{f} = \left(\frac{\partial \underline{f}}{\partial x_1}\Big|_{\underline{x}=\underline{a}} \Big| \cdots \Big| \frac{\partial \underline{f}}{\partial x_m}\Big|_{\underline{x}=\underline{a}}\right)$

מטריצה $n\times m$; m וקטורים ב- $\mathbb{R}^n$

דוגמאות ① $m=1$: $\underline{f}: U\subset\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$\underline{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$ ← n פונקציות ממשיות

$$d\underline{f}/dt = \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ \vdots \\ f_n'(t) \end{pmatrix}$$

$\underline{f}(a+h) = \underline{f}(\underline{a}) + h\underline{f}'(\underline{a}) + \underbrace{o(h)}_{\underline{R}(h)\text{ וקטורית}}$, $\frac{\underline{R}(h)}{h} \xrightarrow{h\to 0} 0$

---

①' $\underline{f}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$t \longmapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

$\Leftarrow$ $Df = \underline{f}'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$

---

② $n=1$: $f: U\subset\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$

$Df = (\partial f/\partial x_1, \dots, \partial f/\partial x_m)$
$\equiv (\nabla f)^T$ **גרדיאנט**

---

②' $f(x,y) = x^2 - 2y^2$

$Df = (2x, -4y)$

$\boxed{48}$

<u>משפט</u> f דיפרנציאבילית ב-$\underline{a}$ $\Leftarrow$ $\partial_e \underline{f} = (D_a \underline{f}) \cdot \underline{e}$

כפל של מטריצות

<u>הוכחה</u> f דיפרנצ' $\Leftarrow$

$$\lim_{\underline{h}\to \underline{0}} \frac{\underline{f}(\underline{a}+\underline{h})-\underline{f}(\underline{a}) - \sum_{i=1}^{m} h_i \, \partial \underline{f}/\partial x_i}{\|\underline{h}\|} = \underline{0}$$

$\underline{h}=t\underline{e}$ $\Leftarrow$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\underline{f}(\underline{a}+t\underline{e})-\underline{f}(\underline{a}) - \sum_{i=1}^{m} t e_i \, \partial \underline{f}/\partial x_i}{t} = \underline{0}$$

$\Leftarrow$

$$\partial_e \underline{f} \equiv \lim_{t\to 0} \frac{\underline{f}(\underline{a}+t\underline{e})-\underline{f}(\underline{a})}{t} = \sum_{i=1}^{m} e_i \, \partial \underline{f}/\partial x_i$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{f}}{\partial x_1} & \frac{\partial \underline{f}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \underline{f}}{\partial x_m} \end{pmatrix}}_{D\underline{f}} \underbrace{\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix}}_{\underline{e}}$$

כפל מטריצות

□

<u>דוגמאות</u> ①

$\underline{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$\underline{f}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ x-2y \\ y^2 \end{pmatrix}$ $\Leftarrow$ $\begin{cases} \partial \underline{f}/\partial x = \begin{pmatrix} 2x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \partial \underline{f}/\partial y = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2y \end{pmatrix} \end{cases}$ $\Leftarrow$ $D\underline{f} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 1 & -2 \\ 0 & 2y \end{pmatrix}$

$\Downarrow$

$$\partial_{\binom{1}{1}} \underline{f} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 1 & -2 \\ 0 & 2y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ -1 \\ 2y \end{pmatrix}$$

---

②

$f: U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

דיפרנציאבילית ב-$\underline{a}$ $\Leftarrow$ $Df = (\partial f/\partial x_1, \dots, \partial f/\partial x_m)$

$$\partial_{\underline{e}} f = \left(\partial f/\partial x_1, \dots, \partial f/\partial x_m\right)\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix} = e_1 \, \partial f/\partial x_1 + \cdots + e_m \, \partial f/\partial x_m$$

מכפלה מטריצות

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \partial f/\partial x_1 \\ \vdots \\ \partial f/\partial x_m \end{pmatrix}}_{\underline{\nabla} f} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix}}_{\underline{e}}$$

מכפלה פנימית

$\underline{e} \in \mathbb{R}^m$ וקטור יחידה $\|\underline{e}\|=1$ $\Leftarrow$ $\partial_{\underline{e}} f = \|\underline{\nabla} f\| \cdot \cos\angle(\underline{\nabla} f, \underline{e})$

מקסימום כאשר $\underline{e} \parallel \underline{\nabla} f$

ולכן בכיוון זה, $\partial_{\underline{e}} f = \|\underline{\nabla} f\|$

---

③

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x,y) = x^2 - 2y^2$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \overset{(\text{ב-}a)}{=} 6$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -4y = -4$

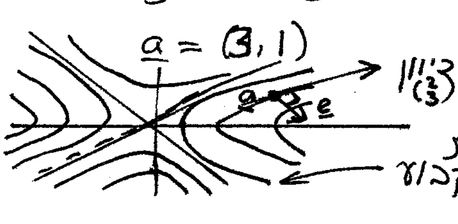
$Df|_{\underline{a}} = (6, -4)$

$\underline{\nabla} f|_{\underline{a}} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\Downarrow$

נגזרת של f מקס' בכיוון $\underline{e} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{13} \\ -2/\sqrt{13} \end{pmatrix}$, שיפוע $2\sqrt{13}$ (גודל של $\underline{\nabla} f$)

$\Rightarrow$ בכיוון $\binom{2}{3}$ נגזרת $=0$



משפט

$$\left.\begin{array}{r} * \quad f: \underset{\mathbb{R}^m}{U} \to \mathbb{R}^n \;,\; \underline{a} \in U \\ * \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} \; (1\le i\le m) \text{ קיימות בסביבה של } \underline{a} \\ * \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} \text{ רציפות ב-} \underline{a} \text{ (לכל } i\text{)} \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ דיפרנציאבילית ב-} \underline{a}$$

(כמו דף 46)

הערה לקבל דיפרנציאביליות, ~~לא מספיק~~ לדעת שכל נגזרת כיוונית קיימת בנקודה וגם שהם "ליניאריות". לדוגמה:

$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)^{3/2}/y & y\neq0\\ 0 & y=0\end{cases}$ בנקודה $(0,0)$ [לא רציפה ב-$(0,0)$]

$f(ta,tb)=\begin{cases}t^2\frac{(a^2+b^2)^{3/2}}{b} & b\neq0\\ 0 & b=0\end{cases} \Rightarrow \partial_{\binom{a}{b}} f\Big|_{(0,0)}=0$ לכל כיוון $\binom{a}{b}$ ב-$\mathbb{R}^2$

$\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\begin{cases}\frac{x^2+y^2}{y} & y\neq0\\ 0 & y=0\end{cases} \Rightarrow \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ לא קיים

$\Downarrow$

f לא רציפה ב-$(0,0)$ $\Rightarrow$ f לא דיפרנציאבילית ב-$(0,0)$

למה נניח ש- $g: \underset{\mathbb{R}^m}{U} \to \mathbb{R}^n$ פונקציה, $\underline{0}\in U$. אזי התנאים הבאים שקולים:

א) $\lim_{\underline{h}\to\underline{0}}\frac{g(\underline{h})}{\|\underline{h}\|}=\underline{0}$

ב) $\lim_{\underline{h}\to\underline{0}}\frac{\|g(\underline{h})\|}{\|\underline{h}\|}=0$

ג) קיימות פונקציות $\underline{\alpha_1}(\underline{h})\cdots\underline{\alpha_m}(\underline{h})$ כך ש- $\lim_{\underline{h}\to\underline{0}}\underline{\alpha_i}(\underline{h})=\underline{0}$ וגם $g(\underline{h})=\sum_{i=1}^{m}h_i\underline{\alpha_i}(\underline{h})$

הוכחה א) $\Leftrightarrow$ ב): מיד

ב) $\Rightarrow$ ג) נגדיר $\underline{\alpha_i}(\underline{h})=\begin{cases}\frac{h_i}{\|\underline{h}\|^2}g(\underline{h}) & \underline{h}\neq\underline{0}\\ \underline{0} & \underline{h}=\underline{0}\end{cases} \Rightarrow \sum_{i=1}^{m}h_i\underline{\alpha_i}(\underline{h})=\sum_{i=1}^{m}\frac{h_i^2}{\|\underline{h}\|^2}g(\underline{h}) = g(\underline{h})$

וגם $\|\underline{\alpha_i}(\underline{h})\|=\underbrace{\frac{|h_i|}{\|\underline{h}\|}}_{\le1}\cdot\underbrace{\frac{\|g(\underline{h})\|}{\|\underline{h}\|}}_{\to0}\xrightarrow{\underline{h}\to\underline{0}}0$

ג) $\Rightarrow$ ב) $\frac{\|g(\underline{h})\|}{\|\underline{h}\|}\le\sum_{i=1}^{m}\underbrace{\frac{|h_i|}{\|\underline{h}\|}}_{\le1}\underbrace{\|\underline{\alpha_i}(\underline{h})\|}_{\to0}\xrightarrow{\underline{h}\to\underline{0}}0$

$\square$

דוגמה $m=2$, $n=1$: $\lim_{x,y\to0}\frac{g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0 \Leftrightarrow$ קיימות פונקציות $\alpha(x,y),\beta(x,y)$ כך ש- $g(x,y)=\alpha(x,y)x+\beta(x,y)y$ וגם $\alpha\to0$, $\beta\to0$ כאשר $x,y\to0$

מסקנה

$f: U \to \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ דיפרנציאבילית ב- $\underline{a} \in U$

$\Longleftrightarrow$ קיימת מטריצה $\underline{D}$ כך ש- $\lim_{\underline{h}\to\underline{0}} \frac{f(\underline{a}+\underline{h})-f(\underline{a})-\underline{D}\underline{h}}{\|\underline{h}\|}=\underline{0}$

$\Longleftrightarrow$ קיימת מטריצה $\underline{D}$ ופונקציות $\underline{\alpha_i}(\underline{h}) \in \mathbb{R}^n$ כך ש-

$$f(\underline{a}+\underline{h})-f(\underline{a}) = \underline{D}\underline{h} + \sum_{i=1}^{m} h_i\underline{\alpha_i}(\underline{h})$$

כאשר $\lim_{\underline{h}\to 0}\underline{\alpha_i}(\underline{h})=\underline{0}$ לכל $i=1,2,\cdots m$

$$\sum h_i\underline{A_i} = \underbrace{(\underline{A_1} \mid \underline{A_2} \mid \cdots \mid \underline{A_m})}_{\underline{D}=D_{\underline{a}}\underline{f}\ \text{מטריצה}}\underbrace{\begin{pmatrix}h_1\\ \vdots \\ h_m\end{pmatrix}}_{\underline{h}} = \underline{D}\underline{h}$$

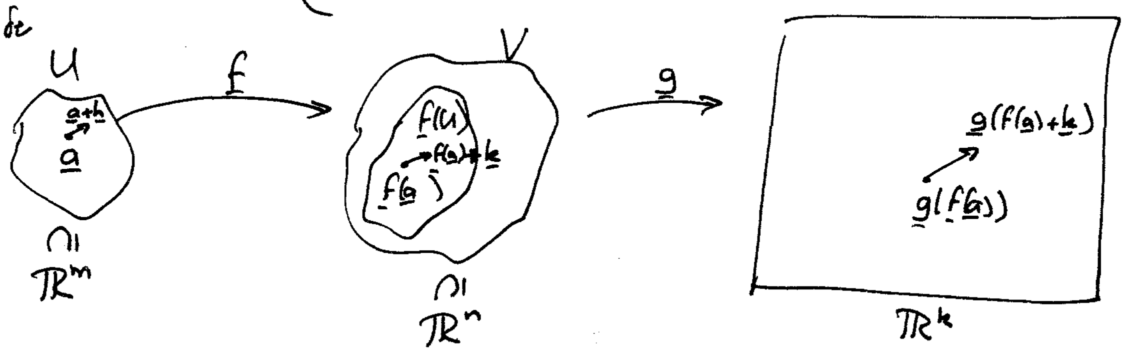
$\underline{A_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$

כלל השרשרת

* $\underline{f}: U \to \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ דיפרנציאבילית ב- $\underline{a} \in \mathring{U}$
* $\underline{g}: V \to \mathbb{R}^k$, $V \supseteq \underline{f}(U)$ דיפרנציאבילית ב- $f(\underline{a})$

$\Longrightarrow$ $g\circ f: U \to \mathbb{R}^k$ דיפרנציאבילית ב- $\underline{a}$ וגם $D_{\underline{a}}(g\circ f)=(D_{f(\underline{a})}g)(D_{\underline{a}}f)$

מכפלה של מטריצות



הוכחה ל- $\underline{h} \in \mathbb{R}^m$ מספיק קטן, נסמן $\underline{f}(\underline{a}+\underline{h})-\underline{f}(\underline{a}) = \underline{k}$ $\Leftarrow$ $\underline{f}(\underline{a}+\underline{h}) = \underline{f}(\underline{a})+\underline{k}$

$\underline{f}$ דיפרנציאבילית ב- $\underline{a}$ $\Longleftarrow$ $\underline{k}=\underline{f}(\underline{a}+\underline{h})-\underline{f}(\underline{a}) = (D_a f)\underline{h} + \sum_{i=1}^{m} h_i\underline{\alpha_i}(\underline{h})$ כאשר $\forall i\ \lim_{\underline{h}\to\underline{0}}\underline{\alpha_i}(\underline{h})=\underline{0}$

$\underline{g}$ דיפרנציאבילית ב- $f(\underline{a})$ $\Longleftarrow$ $\underline{g}(\underline{f}(\underline{a})+\underline{k})-\underline{g}(\underline{f}(\underline{a})) = (D_{f(a)}g)\underline{k} + \sum_{j=1}^{n} k_j\underline{\beta_j}(\underline{k})$ כאשר $\forall j\ \lim_{\underline{k}\to\underline{0}}\underline{\beta_j}(\underline{k})=\underline{0}$

לכן:

$$\underbrace{(g\circ f)(\underline{a}+\underline{h})}_{g(f(\underline{a})+\underline{k})} - (g\circ f)(\underline{a}) = (D_{f(a)}g)\left((D_a f)\underline{h} + \sum_{i=1}^{m} h_i\underline{\alpha_i}\right) + \sum_{j=1}^{n} k_j\underline{\beta_j}(\underline{k})$$

$$= \boxed{(D_{f(a)}g)(D_a f)}\underline{h} + \sum_{i=1}^{n} h_i\underline{\gamma_i}(\underline{h})$$

כאשר

$$\underline{\gamma_i}(\underline{h}) = \underbrace{(D_{f(a)}g)}_{\text{קבוע}}\cdot\underbrace{\underline{\alpha_i}(\underline{h})}_{\to\underline{0}} + \sum_{j=1}^{n}\underbrace{(D_a f)_{ji}}_{\text{קבוע}}\underbrace{\underline{\beta_j}(\underline{k})}_{\to\underline{0}} + \sum_{j=1}^{n}\underbrace{(\underline{\alpha_i}(\underline{h}))_j}_{\to 0}\underbrace{\underline{\beta_j}(\underline{k})}_{\to\underline{0}}$$

$\underline{h}\to\underline{0} \xRightarrow{\text{רציפות}} \underline{k}\to\underline{0} \Rightarrow \underline{\gamma_i}(\underline{h})\to\underline{0} \Rightarrow g\circ f$ ד"פ וגם $D_a(g\circ f)=(D_{f(a)}g)(D_a f)$ □

51

דוגמאות א)

$m=1, \quad n=2, \quad k=1$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \\ t & \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \quad (u,v) & \end{tikzcd}$$

$$(g\circ f)(t) = g(u(t),v(t))$$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$t \mapsto \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$

$Df = f'(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix}$

$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(u,v) \mapsto g(u,v)$

$Dg = \begin{pmatrix} \partial g/\partial u & \partial g/\partial v \end{pmatrix}$

$g\circ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$t \mapsto g(u(t),v(t))$

$D(g\circ f) = \frac{dg}{dt}$

כאשר g פונקציה
של t (דרך u ו-v)

$$\begin{aligned} D(g\circ f) &= (Dg)\cdot(Df) \\ &= \begin{pmatrix} \partial g/\partial u & \partial g/\partial v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial g}{\partial u} u'(t) + \frac{\partial g}{\partial v} v'(t) \end{aligned} \Longrightarrow \boxed{\frac{dg}{dt} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{dv}{dt}}$$

<u>הערה</u>:

g פונקציה של שני משתנים $\longrightarrow$ $dg = \frac{\partial g}{\partial u} du + \frac{\partial g}{\partial v} dv$

u ו-v פונקציות של משתנה אחד $\longrightarrow$ $\begin{cases} du = \frac{du}{dt} dt \\ dv = \frac{dv}{dt} dt \end{cases}$

g כפונקציה של משתנה אחד דרך $g = g(u(t),v(t))$ $\longrightarrow$ $dg = \frac{d}{dt}(g(u(t),v(t)))\, dt$

כלל השרשרת $\Leftarrow$ הצבות של dg מתאימות

א')

$g(u,v) = uv$

$u(t) = t^2$

$v(t) = t+1$

$f(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t+1 \end{pmatrix}$

$Df = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix}$

$Dg = (v \quad u)$

$$\begin{cases} u = t^2 \\ v = t+1 \end{cases}$$

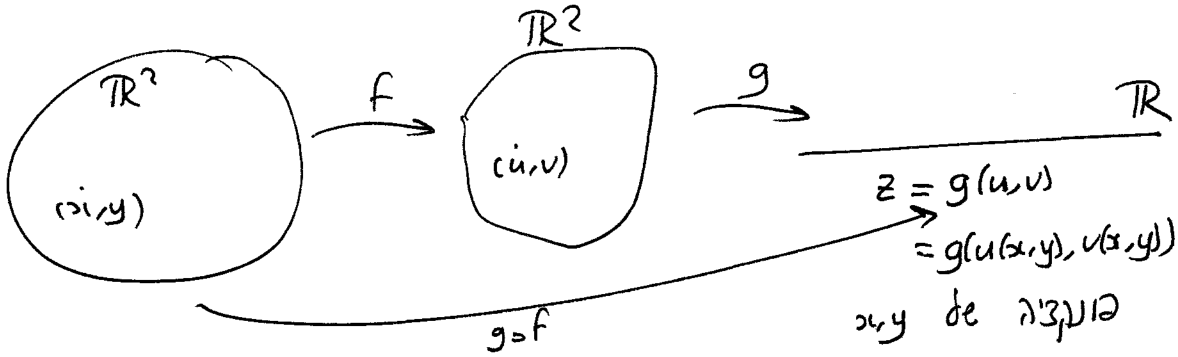
$g = uv$

$\Rightarrow g = t^2(t+1)$

$$\Rightarrow \frac{dg}{dt} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{dv}{dt} = v\cdot 2t + u\cdot 1 = (t+1)\cdot 2t + t^2\cdot 1$$

$$D_1(g\circ f) = (D_{f(1)}g)(D_1 f) = (D_{\binom{1}{2}}g)(D_1 f) = (2 \quad 1)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 5$$

$m=2 \quad n=2 \quad k=1$ (ב



$z = g(u,v)$
$= g(u(x,y), v(x,y))$
פונקציה של x,y

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u(x,y)\\ v(x,y)\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} u\\ v\end{pmatrix} \mapsto g(u,v)$$

$$Df = \begin{pmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y\\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y\end{pmatrix} \qquad Dg = \left(\partial g/\partial u \quad \partial g/\partial v\right)$$

$\underline{A_1}$ $\quad$ $\underline{A_2}$

כלל השרשרת

$$g\circ f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

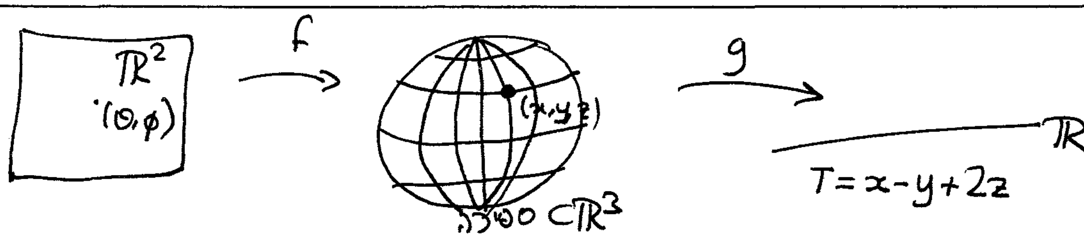
$$\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix} \mapsto g(u(x,y), v(x,y))$$

$$\left(\frac{\partial (g\circ f)}{\partial x}, \frac{\partial (g\circ f)}{\partial y}\right) = D(g\circ f) = \left(\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}\right)\begin{pmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y\\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y\end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial (g\circ f)}{\partial x}, \frac{\partial (g\circ f)}{\partial y}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

(ב'



$T = x - y + 2z$

$x = \sin\theta\cos\phi$
$y = \sin\theta\sin\phi$
$z = \cos\theta$

$$\underbrace{\left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \quad \frac{\partial T}{\partial \phi}\right)}_{D(g\circ f)} = \underbrace{\left(\frac{\partial T}{\partial x} \quad \frac{\partial T}{\partial y} \quad \frac{\partial T}{\partial z}\right)}_{Dg} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi}\\ \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi}\\ \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi}\end{pmatrix}}_{Df} = (1 \ \ -1 \ \ 2)\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi & -\sin\theta\sin\phi\\ \cos\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi\\ -\sin\theta & 0\end{pmatrix}$$

$$= \big(\underbrace{\cos\theta(\cos\phi-\sin\phi) - 2\sin\theta}_{\partial T/\partial\theta},\ \underbrace{-\sin\theta(\cos\phi+\sin\phi)}_{\partial T/\partial\phi}\big)$$

דוגמא: פונקציות הומוגניות

$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ נקראת פונקציה הומוגנית מסדר α אם $f(tx_1,\dots,tx_n)=t^\alpha f(x_1,\dots,x_n), \forall t,x_i\in\mathbb{R}$

נניח ש- $a_1,\dots,a_n$ קבועים.

$$\frac{d}{dt}\left(f(ta_1,\dots,ta_n)\right) = \frac{d}{dt}\left(t^\alpha f(a_1,\dots,a_n)\right)$$

כלל השרשרת

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{(ta_1,\dots,ta_n)}\frac{d(ta_1)}{dt}+\dots+\left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{(ta_1,\dots,ta_n)}\frac{d(ta_n)}{dt} = \alpha t^{\alpha-1}f(a_1,\dots,a_n)$$

$t=1 \Rightarrow$
$$\left.\left(a_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\dots+a_n\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\right|_{(a_1,\dots,a_n)}=\alpha f(a_1,\dots,a_n)$$

$a_i=x_i \Rightarrow$
$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}=\alpha f}$$

דוגמאות

* $x^2\tan^{-1}y/x$ הומוגנית מסדר 2
* $\frac{xy^2}{x^2+y^2}$ הומוגנית מסדר 1
* $f(x,y)$ הומוגנית מסדר 0 $\Leftrightarrow \exists g: f(x,y)=g(x/y)$

* $f(x,y)=x^2\tan^{-1}y/x$

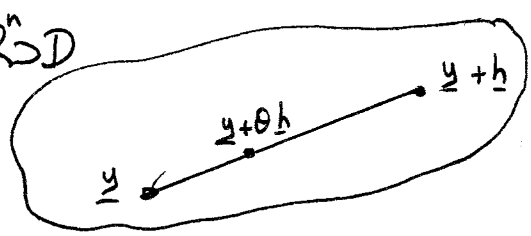
$$f_x=2x\tan^{-1}y/x+x^2\left(-\frac{y}{x^2}\right)\frac{1}{1+(y/x)^2} = 2x\tan^{-1}y/x-\frac{x^2y}{x^2+y^2}$$
$$f_y=x^2(1/x)\frac{1}{1+(y/x)^2}=\frac{x^3}{x^2+y^2}$$
$$\Rightarrow xf_x+yf_y=2x^2\tan^{-1}y/x=2f$$

<u>משפט</u>

* $D\subset\mathbb{R}^n$ תחום פתוח
* $f:D\to\mathbb{R}$
* $\underline{y},\underline{h}\in\mathbb{R}^n$ כך ש- $[\underline{y},\underline{y}+\underline{h}]$ קטע $\subset D$
* $\partial f/\partial x_i$ רציפות ב- D $(\forall i)$

$$\Rightarrow \exists\theta\in(0,1): f(\underline{y}+\underline{h})-f(\underline{y})=\sum_{i=1}^{n}h_i\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\underline{y}+\theta\underline{h}}$$

$\mathbb{R}^n\supset D$



<u>הוכחה</u> נגדיר פונקציה $F:[0,1]\to\mathbb{R}$ ע"י
$$F(t)=f(\underline{y}+t\underline{h})$$

$\partial f/\partial x_i$ רציפות $\Rightarrow$ f דיפרנציאבילית ב- D

$\xRightarrow{\text{כלל השרשרת}}$ F דיפרנציאבילית ב- D

$$F'(t)=\left(D_{\underline{y}+t\underline{h}}f\right)\cdot\frac{d}{dt}(\underline{y}+t\underline{h})$$

מכפלה סקלרית

$$=\left.\left(\partial f/\partial x_1,\dots,\partial f/\partial x_n\right)\right|_{\underline{y}+t\underline{h}}\cdot\underline{h}$$
$$=\sum_{i=1}^{n}h_i\,\partial f/\partial x_i\Big|_{\underline{y}+t\underline{h}}$$

משפט הערך הממוצע $\Rightarrow$ $\exists\theta\in(0,1)$:
$F(1)-F(0)=F'(\theta)$ $\square$

דוגמאות

א) $n=1$ $\quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$\underset{(0,1)}{\exists\theta}: f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h)$$

ב) $n=2$ $\quad f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$\underset{(0,1)}{\exists\theta}: f(a+h,b+k)-f(a,b)=hf_x(a+\theta h,b+\theta k)+kf_y(a+\theta h,b+\theta k)$$

<u>מסקנה</u>

* D קשירה (מסילתית)
* $\partial f/\partial x_i=0$ $(\forall i)$ ב- D

$\Rightarrow$ $f=$ קבוע ב- D.