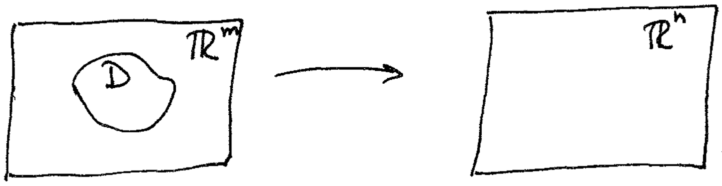
פונקציות של כמה משתנים

$f:(D\subset\mathbb{R}^m)\longrightarrow\mathbb{R}^n$ היא פונקציה של m משתנים עם ערכים ב- $\mathbb{R}^n$.

$$f(x_1,\dots,x_m)=\begin{pmatrix} f_1(x_1,\dots,x_m)\\ \vdots \\ f_n(x_1,\dots,x_m)\end{pmatrix}$$ — הקואורדינטות פונקציות $f_i: D\to\mathbb{R}$



domain of definition
$D=$ תחום המוגדרות של f

$f(D)=\{f(\underline{x})\mid \underline{x}\in D\}\subseteq\mathbb{R}^n$
$=$ (תמונה של f)
image

דוגמאות

א) $\underline{f}:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}x+y\\y\\e^x\end{pmatrix}$$

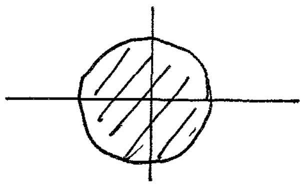
$D=\mathbb{R}^2$

$\underline{f}(D)=$ משטח ב-$\mathbb{R}^3$

ב) $\underline{f}:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\longmapsto \ln\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

תחום המוגדרות: $x^2+y^2<1$



ג) $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}x\cos y\\x\sin y\end{pmatrix}$$

$D=\mathbb{R}^2$

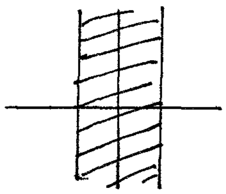
$\underline{f}(D)=\mathbb{R}^2$

לא חד-חד ערכית כי $\underline{f}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\underline{f}\begin{pmatrix}1\\2\pi\end{pmatrix}$

ד) $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$

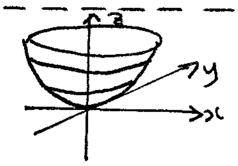
$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\longmapsto \sin^{-1}x+y$$

תחום המוגדרות $-1\le x\le 1$.

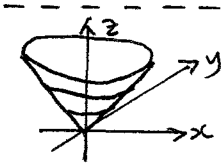


לפונקציה $f:D\to\mathbb{R}$ ($D\subset\mathbb{R}^2$) יש גרף (graph) ב-$\mathbb{R}^3$

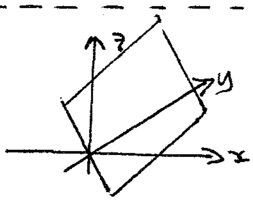
$\{(x,y,f(x,y))\mid (x,y)\in D\}$



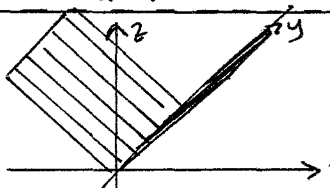
$f(x,y)=x^2+y^2$
paraboloid



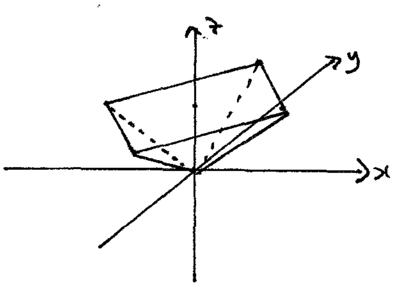
$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$
cone



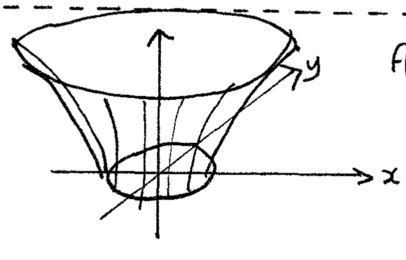
$f(x,y)=x+y$
plane



$f(x,y)=|x|$



$f(x,y)=|x|+|y|$
pyramid

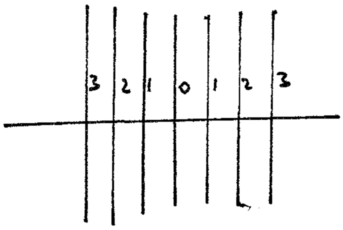


$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-1}$
½ hyperboloid

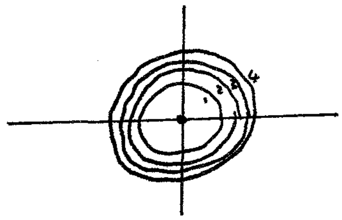
קווי גובה γ — level lines

$\{(x,y)\in D \mid f(x,y)=\gamma \text{ (קבוע)}\} = (z=\gamma \text{ (קבוע)}) \cap (f \text{ גרף של})$

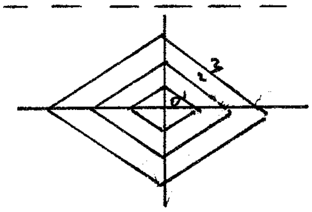
$f(x,y)=|x|$



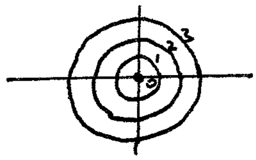
$f(x,y)=x^2+y^2$



$f(x,y)=|x|+|y|$

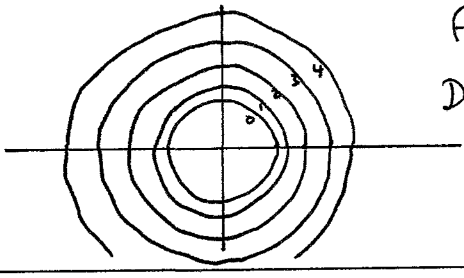


$f(x,y)=\sqrt{(x^2+y^2)}$

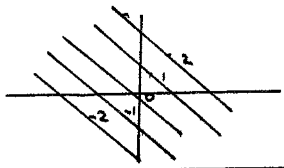


$f(x,y)=\sqrt{(x^2+y^2-1)}$

$D=\{(x,y): x^2+y^2\geq 1\}$



$f(x,y)=x+y$



הגדרה $f: D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $\underline{x}\in D$

אומרים ש- f רציפה ב- $\underline{x}$ אם"ם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש-

$\underline{y}\in B_\delta(\underline{x})\cap D \Rightarrow f(\underline{y})\in B_\varepsilon(f(\underline{x}))$

אמ"מ $(\underline{x}^{(k)}\to \underline{x}) \Rightarrow (f(\underline{x}^{(k)})\to f(\underline{x}))$

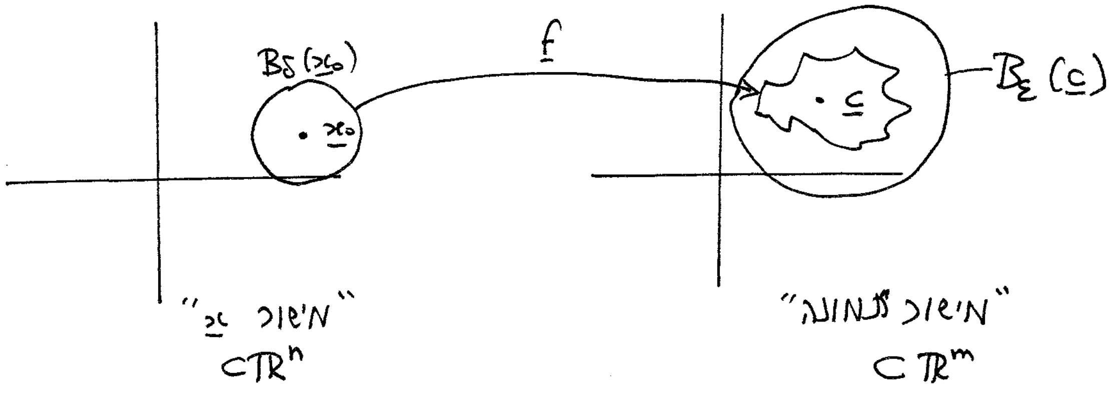
הגדרה $f: D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_0\in \bar{D}$

אומרים ש- $\lim_{\underline{x}\to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = \underline{c}$

אמ"מ $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \ \underline{x}\in B_\delta(\underline{x}_0)\setminus\{\underline{x}_0\} \Rightarrow f(\underline{x})\in B_\varepsilon(\underline{c})$

אמ"מ $\left((\underline{x}^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} \underline{x}_0) \Rightarrow (f(\underline{x}^{(k)}) \xrightarrow{k\to\infty} \underline{c})\right)$

סדרה $x^{(k)}\neq x_0$



דוגמאות א) $f(x,y)=x^2+y^2$ פונקציה רציפה

ב) $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{2x^2+y^2}{x^2+y^2} = \frac{3}{2}$

ג) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+y^2}{x^2+y^2}$ לא קיים

$\forall x\neq 0,\quad \lim_{y\to 0}\frac{2x^2+y^2}{x^2+y^2}=2 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{2x^2+y^2}{x^2+y^2}\right)=2$

$\neq$

$\forall y\neq 0,\quad \lim_{x\to 0}\frac{2x^2+y^2}{x^2+y^2}=1 \Rightarrow \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+y^2}{x^2+y^2}\right)=1$

ד) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad (x,y)\neq(0,0)$

$f(x,0)=0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)=0$

$f(0,y)=0 \Rightarrow \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)=0$

$f(x,x)=\frac{1}{2} \Rightarrow$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ לא קיים

ה) $f(x,y) = \frac{xy^3}{x^2+y^6} \quad (x,y)\neq(0,0)$

בכיוון $y=\alpha x$, $f(x,\alpha x)=\frac{\alpha^3 x^4}{x^2+\alpha^6 x^6} \xrightarrow{x\to 0} 0$

בכיוון $x=0$, $f(0,y)=0 \xrightarrow{y\to 0} 0$

$\forall\alpha \Rightarrow$ בכל כיוון, $f(x,y)\to 0$ אם (x,y) הולך על קו ישר ל- $(0,0)$

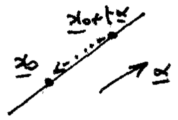
אבל עדיין $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ לא קיים.

מדוע? $f(x,x^3)=\frac{1}{2} \underset{x\to 0}{\not\to} 0$

<u>משפט</u>

* $F: D\subset\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
* $\underline{x}_0\in\overline{D}$
* $\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f(\underline{x})=c$

$\Rightarrow \lim_{t\to 0} f(\underline{x}_0+t\underline{\alpha})=c$ לכל כיוון $\underline{\alpha}$.



<u>משפט</u>

* $f: D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$
* $\underline{x}_0\in\overline{D}$

$\Rightarrow \lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f(\underline{x})=c$ אם"ם לכל סדרה $\underline{x}^{(k)}\to\underline{x}_0$ של נקודות מ-D אז גם $f(\underline{x}^{(k)})\to c$

<u>משפט</u>

* $\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ קיים
* $\lim_{x\to x_0} f(x,y)=\phi(y)$ קיים לכל y ב- $[c,d]$
* $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$

$\Rightarrow$

* $\lim_{y\to y_0}\phi(y)$ קיים
* $\lim_{y\to y_0}\phi(y)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$

<u>הוכחה</u>

$L=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ קיים $\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \left(d((x,y),(x_0,y_0))<\delta \Rightarrow |f(x,y)-L|<\frac{\varepsilon}{2}\right)$

$\lim_{x\to x_0} f(x,y)=\phi(y) \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\rho(y)>0\ \left(d(x,x_0)<\rho \Rightarrow |f(x,y)-\phi(y)|<\frac{\varepsilon}{2}\right)$

נניח $d(y,y_0)<\frac{\delta}{2}$

נבחר x כך ש- $d(x,x_0)<\min\left(\rho(y),\frac{\delta}{2}\right)$ $\Rightarrow$

$|\phi(y)-L| \le |\phi(y)-f(x,y)| + |f(x,y)-L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

כי $d((x,y),(x_0,y_0))<\delta$

$\square$