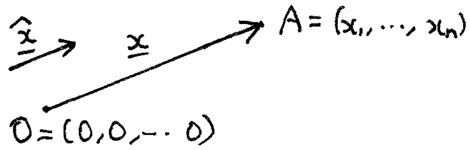
מבוא לטופולוגיה של $\mathbb{R}^n$

n-dimensional Euclidean space

$\{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i=1,\dots,n\} = E_n =$ מרחב האוקלידי ה-n מימדי

נקודות

וקטור = (אורך, כיוון)



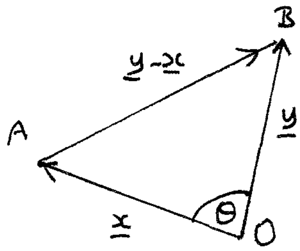
$$\underline{x} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \rightleftarrows A \in E_n$$

אורך: $\|\underline{x}\| = \sqrt{(x_1^2 + \cdots + x_n^2)}$

כיוון: $\hat{\underline{x}} = \underline{x}/\|\underline{x}\| =$ (וקטור יחידה בכיוון של $\underline{x}$) unit vector

---

שני נקודות



$\overrightarrow{AB} = \underline{y} - \underline{x}$

$AB = \|\underline{y}-\underline{x}\| = d(\underline{x},\underline{y})$

מרחק בין A ל-B

$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA\cdot OB\cdot\cos\theta$ Pythagoras Coen (extended)

$$\Leftarrow \|\underline{x}\|\cdot\|\underline{y}\|\cos\theta = \frac{\|\underline{x}\|^2+\|\underline{y}\|^2-\|\underline{x}-\underline{y}\|^2}{2}$$

מכפלה פנימית

$\underline{x},\underline{y} \in \mathbb{R}^n$

$$\underline{x}\cdot\underline{y} \equiv \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

תכונות

linearity
- א) $(\underline{x}+\underline{y})\cdot\underline{z} = \underline{x}\cdot\underline{z} + \underline{y}\cdot\underline{z}$
- ב) $(\lambda\underline{x})\cdot\underline{y} = \lambda(\underline{x}\cdot\underline{y})$

positivity
- ג) $\underline{x}\cdot\underline{x} = \|\underline{x}\|^2 \geq 0$
- ד) $\underline{x}\cdot\underline{x} = 0 \Rightarrow \underline{x} = 0$

symmetry
- ה) $\underline{x}\cdot\underline{y} = \underline{y}\cdot\underline{x}$

לכן

$$\tfrac{1}{2}(\|\underline{x}\|^2 + \|\underline{y}\|^2 - \|\underline{x}-\underline{y}\|^2)$$
$$= \tfrac{1}{2}(\underline{x}\cdot\underline{x} + \underline{y}\cdot\underline{y} - (\underline{x}-\underline{y})\cdot(\underline{x}-\underline{y}))$$
$$= \tfrac{1}{2}(\underline{x}\cdot\underline{x} + \underline{y}\cdot\underline{y} - (\underline{x}\cdot\underline{x} - \underline{y}\cdot\underline{x} - \underline{x}\cdot\underline{y} + \underline{y}\cdot\underline{y}))$$
$$= \underline{x}\cdot\underline{y}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{x}\cdot\underline{y} = \|\underline{x}\|\cdot\|\underline{y}\|\cdot\cos\theta}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{x}\cdot\underline{y} = 0 \\ \underline{x},\underline{y} \neq \underline{0} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underline{x} \perp \underline{y}$$

תכונה כללית של מרחב מכפלה פנימית: $|\underline{x}\cdot\underline{y}| \leq \|\underline{x}\|\cdot\|\underline{y}\|$ (אי שיוויון Cauchy-Schwartz)

מסקנה: $\|\underline{x}+\underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|$ (אי שיוויון המשולש)

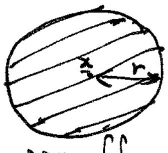
כדורים ותיבות

$\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $r>0$

כדור פתוח (open ball): $B_r(\underline{x}) = \{\underline{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\underline{x}-\underline{y}\| < r\}$

כדור סגור (closed ball): $\bar{B}_r(\underline{x}) = \{\underline{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\underline{x}-\underline{y}\| \leq r\}$

$B_r(\underline{x})$



כולל שפה

$\bar{B}_r(\underline{x})$

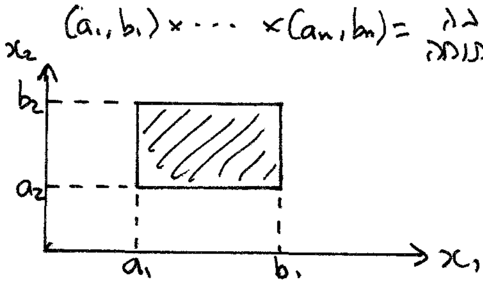
$a_i, b_i \in \mathbb{R}$
$(i=1,\dots n)$
$a_i < b_i$

קטע סגור $[a_i, b_i]$

קטע פתוח (a_i, b_i)

$[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n] =$ תיבה סגורה

$(a_1,b_1)\times\cdots\times(a_n,b_n) =$ תיבה פתוחה $= \{\underline{x} \mid a_i < x_i < b_i \ \forall i\}$



סגור, פנים ושפה של תת-קבוצה של $\mathbb{R}^n$

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ $\Leftarrow$

סגור של A (closure): $\bar{A} \equiv \{\underline{x}\in\mathbb{R}^n \mid \forall\varepsilon>0,\ A\cap B_\varepsilon(\underline{x})\neq\emptyset\}$

פנים של A (interior): $\mathring{A} \equiv \{\underline{x}\in\mathbb{R}^n \mid \exists\varepsilon>0,\ B_\varepsilon(\underline{x})\subset A\}$

שפה של A (boundary): $\partial A \equiv \{\underline{x}\in\mathbb{R}^n \mid \forall\varepsilon>0,\ A\cap B_\varepsilon(\underline{x})\neq\emptyset,\ A^c\cap B_\varepsilon(\underline{x})\neq\emptyset\}$

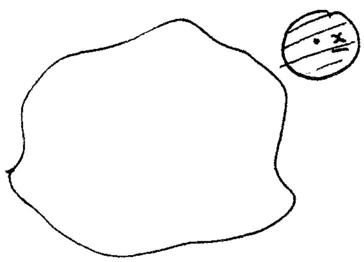
$(A^c \equiv \mathbb{R}^n \setminus A)$

$A\subseteq\mathbb{R}^n$, $x\in\mathbb{R}^n$ $\Leftarrow$

אומרים ש-$\underline{x}$ הינו נקודת הצטברות (point of accumulation) אם"ם $\forall\varepsilon>0,\ A\cap(B_\varepsilon(\underline{x})\setminus\{\underline{x}\})\neq\emptyset$

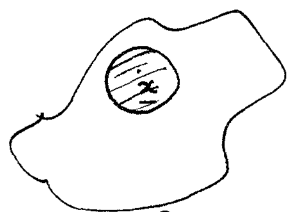
אומרים ש-$\underline{x}$ הינו נקודה פנימית (interior point) אם"ם $\exists\varepsilon>0,\ B_\varepsilon(\underline{x})\subseteq A$

אומרים ש-$\underline{x}$ הינו נקודה חיצונית (exterior point) אם"ם $\exists\varepsilon>0,\ B_\varepsilon(x)\cap A=\emptyset$



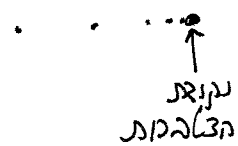
$\underline{x}\notin\bar{A}$

נקודה חיצונית



$\underline{x}\in\mathring{A}$

נקודה פנימית



דוגמאות

א) $\overline{B_1(\underline{0})} = \bar{B}_1(\underline{0})$

ב) $A=\{(n,0)\mid n\in\mathbb{Z}\}$ $\Rightarrow$ $\bar{A}=A,\ \mathring{A}=\emptyset$

ג) תמיד: $\mathring{A}\subseteq A\subseteq\bar{A}$, $\partial A=\bar{A}\setminus\mathring{A}$, $(\mathring{A})^c=\overline{(A^c)}$

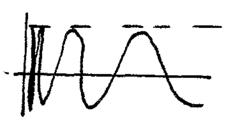
ד) $A=\{(1/n,0)\mid n\in\mathbb{N}\}$ $\Rightarrow$ $(0,0)$ נקודת הצטברות

$\bar{A}=A\cup\{(0,0)\}=\partial A$

$\mathring{A}=\emptyset$

ה) $A=\{(x,\sin\frac{1}{x})\mid x>0\}$ $\Rightarrow$ $\bar{A}=A\cup(\{0\}\times[-1,1])$

$\mathring{A}=\emptyset$



ו) תמיד: $\bar{A}=A\cup\{$נקודות הצטברות$\}$

הערה: x נקודת הצטברות של A $\not\Leftarrow$ $x\in A$

$A=\{(\frac{1}{n},0), n\in\mathbb{N}\}, \underline{x}=(0,0) \to x\in A \not\Leftarrow$

$A=\{(\frac{1}{n},0), n\in\mathbb{N}\}\cup\underline{0}, \underline{x}=\underline{0} \to x\notin A \not\Leftarrow$

$\boxed{73}$

קבוצות פתוחות וסגורות

$\boxed{A\subseteq\mathbb{R}^n}$

$\forall x\in A\ \exists\varepsilon>0\ B_\varepsilon(x)\subset A$ אם"ם אומרים ש- A קבוצה פתוחה (open set)

$\mathring{A}=A$ אם"ם

$\bar{A}=A$ אם"ם אומרים ש- A קבוצה סגורה (closed set)

$\exists M\ \ A\subseteq B_M(\underline{0})$ אם"ם אומרים ש- A חסומה bounded

---

$\boxed{\text{סדרה של נקודות ב- } \mathbb{R}^n \ (\underline{x}^{(m)})}$

$\exists\underline{x}\in\mathbb{R}^n:\ \|\underline{x}^{(m)}-\underline{x}\|\xrightarrow{m\to\infty}0$ אם"ם אומרים ש- $(\underline{x}^{(m)})$ סדרה מתכנסת

$\exists\underline{x}\in\mathbb{R}^n:\ \underline{x}^{(m)}\xrightarrow{m\to\infty}\underline{x}$ אם"ם

$\forall i=1,\dots,n$ קיים $\lim_{m\to\infty}x_i^{(m)}$ אם"ם

$\left(\lim_{m\to\infty}\underline{x}^{(m)}\right)_i=\underbrace{\lim_{m\to\infty}x_i^{(m)}}$ קואורדינטה ה-i-ית

$\lim_{\substack{m\to\infty\\k\to\infty}}\|\underline{x}^{(m)}-\underline{x}^{(k)}\|=0$ אם"ם אומרים ש- $(\underline{x}^{(m)})$ סדרת Cauchy

$\Updownarrow$ (שלמות של $\mathbb{R}^n$)

$(\underline{x}^{(m)})$ סדרה מתכנסת

$X\subset\mathbb{R}^n$ נקראת קבוצה קומפקטית (compact) אם"ם לכל סדרה קיימת תת-סדרה מתכנסת

$\Updownarrow$ משפט Heine-Borel

X סגורה וחסומה (ב- $\mathbb{R}^n$)

- -

$X\subset\mathbb{R}^n$ נקרא מרחב שלם (complete) אם"ם (לכל סדרת Cauchy של נקודות ב- X) גם סדרה מתכנסת בתוך X

$\Updownarrow$

X סגורה $\Leftrightarrow$ $\bar{X}=X$

<u>משפט</u> $x\in\bar{A}$ אם"ם (קיימת סדרה מתכנסת ל- x של נקודות ב- A)

הוכחה $(\Leftarrow)$ $\quad \forall\varepsilon>0,\ B_\varepsilon(x)\cap A\neq\emptyset \xleftarrow{\text{הגדרה}} x\in\bar{A}$

$\exists\ x_n\in B_{1/n}(x)\cap A \Leftarrow \varepsilon=\frac{1}{n}$

$x_n\in A,\ d(x_n,x)<\frac{1}{n}\to0 \Leftarrow$

$x_n\in A\ ,\ x_n\xrightarrow{n\to\infty}x \Leftarrow$

$(\Rightarrow)$ נניח ש- $a_n\xrightarrow{n\to\infty}x$, $a_n\in A$ $\quad\Rightarrow\quad d(a_n,x)\xrightarrow{n\to\infty}0 \quad\Rightarrow\quad \forall\varepsilon>0\ \exists N\ \forall n>N$ $d(a_n,x)<\varepsilon$

$\Leftarrow\ a_n\in A\cap B_\varepsilon(x)$

$\Leftarrow\ A\cap B_\varepsilon(x)\neq\emptyset$

□

דוגמאות

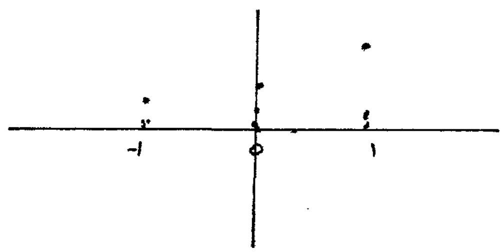
א) ב-$\mathbb{R}^2$, $B_\varepsilon(\underline{x})$ = דיסק ב-$\mathbb{R}^2$, מרכז $\underline{x}$, רדיוס ε

ב) הסדרה (x_n, y_n) של נקודות ב-$\mathbb{R}^2$ מתכנסת אם"ם
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n, \ \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ קיימים

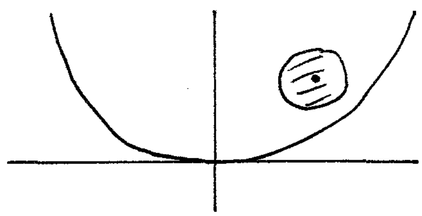
ג) $\underline{x}^{(n)} = \left(\sin\frac{\pi n}{2}, \frac{1}{n}\right) \in \mathbb{R}^2$ סדרה מתבדרת

$$A = \left\{\left(\sin\frac{\pi n}{2}, \frac{1}{n}\right) \middle| n \in \mathbb{N}\right\} \Rightarrow \bar{A} = A \cup \{(0,0),(1,0),(-1,0)\}$$

$$\underline{x}^{(2n)} = \left(0, \frac{1}{2n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0) \qquad \underline{x}^{(4n+1)} = \left(1, \frac{1}{4n+1}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (1,0) \qquad \underline{x}^{(4n-1)} = \left(-1, \frac{1}{4n-1}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (-1,0)$$



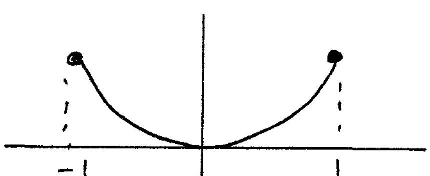
ד) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$ קבוצה סגורה



$$\forall (x,y) \notin A \quad \exists \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon((x,y)) \subset A^c$$

ה) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x \le 1, y = x^2\}$

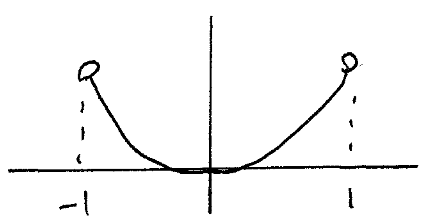
קבוצה קומפקטית



ו) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1, \ y = x^2\}$

לא סגורה $(1,1) \notin A$ נקודת הצטברות

לא פתוחה $\mathring{A} = \emptyset$



תכונות — הוכחה\דוגמא נגדית

א) $A\supseteq B \Rightarrow \bar A\supseteq \bar B$

$x\in\bar A \Leftarrow B_\varepsilon(x)\cap A\neq\emptyset\ \forall\varepsilon>0 \overset{A\supseteq B}{\Leftarrow} B_\varepsilon(x)\cap B\neq\emptyset \Leftarrow x\in\bar B,\ \varepsilon>0$

ב) $A\supseteq B \Rightarrow \mathring A\supseteq\mathring B$

$x\in\mathring A \Leftarrow B_\varepsilon(x)\subseteq B\subseteq A \Leftarrow \exists\varepsilon>0\ B_\varepsilon(x)\subseteq B \Leftarrow x\in\mathring B$

ג) $A\supseteq B \not\Rightarrow \partial A\supseteq\partial B$

$A=B_2(0)$, $\partial A=\{x \mid \|x\|=2\}$

$B=B_1(0)$, $\partial B=\{x \mid \|x\|=1\}$

ד) $\bar A$ קבוצה סגורה

$\bar A\subseteq\overline{(B_\varepsilon(x))^c} \Leftarrow A\subseteq(B_\varepsilon(x))^c \Leftarrow \exists\varepsilon>0\ B_\varepsilon(x)\cap A=\emptyset \Leftarrow x\notin\bar A$

$=(\mathring B_\varepsilon(x))^c=B_\varepsilon(x)^c \Rightarrow \bar A\cap B_\varepsilon(x)=\emptyset \Rightarrow x\notin\overline{(\bar A)} \cdots \Rightarrow \bar A\supseteq\bar{\bar A}\Rightarrow \bar A=\bar{\bar A}$ □

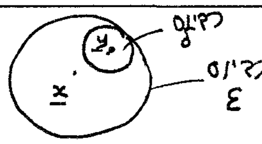
ה) $\mathring A$ קבוצה פתוחה

$\mathring{(\mathring A)}=\mathring A \Leftarrow (\mathring A)^c=\overline{A^c}=\overline{[\overline{A^c}]}=\overline{[(\mathring A)^c]}=[(\mathring{\mathring A})]^c$

$(\mathring B)^c=\overline{(B^c)}$

□

ו) $B_\varepsilon(x)$ קבוצה פתוחה



$d(x,y)<\varepsilon \Leftarrow y\in B_\varepsilon(x)$

נגדיר $\delta=(\varepsilon-d(x,y))$

$z\in B_\varepsilon(x) \Leftarrow d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z) \Leftarrow z\in B_\delta(y)$

$<d(x,y)+\delta=\varepsilon$

לכן $B_\delta(y)\subseteq B_\varepsilon(x)$

□

ז) $\bar B_\varepsilon(x)$ קבוצה סגורה

$d(x,y)>\varepsilon \Leftarrow y\notin\bar B_\varepsilon(x)$

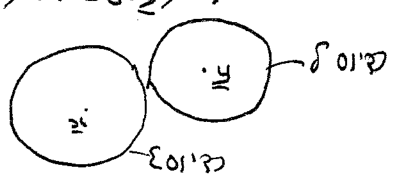
$y\notin\overline{(\bar B_\varepsilon(x))} \Leftarrow \bar B_\varepsilon(x)\cap B_\delta(y)=\emptyset \Leftarrow \delta=d(x,y)-\varepsilon$

$\Downarrow$

$\bar B_\varepsilon(x)\supseteq\overline{\bar B_\varepsilon(x)}$

$\Downarrow$

$\bar B_\varepsilon(x)=\overline{\bar B_\varepsilon(x)}$



□

ח) $\bar A$ הקבוצה סגורה הכי קטנה שמכילה A

א) $\bar A\supseteq A$, $\bar A$ קבוצה סגורה

ב) אם B קבוצה סגורה, $B\supseteq A$ $\Leftarrow$ $B\supseteq\bar A$ ($B=\bar B$)

ט) $\mathring A$ הקבוצה פתוחה הכי גדולה שמוכלת ב-A

א) $\mathring A\subseteq A$, $\mathring A$ קבוצה פתוחה

ב) אם $B\subseteq A$, B פתוחה $\Leftarrow$ $\mathring B\subseteq\mathring A$ ($B=\mathring B$)

י) $\{A_i\}_{i\in I}$ קבוצות פתוחות $\Rightarrow$ $\bigcup_{i\in I}A_i$ פתוחה; $\not\Rightarrow$ $\bigcap_{i\in I}A_i$ פתוחה — נכון אם I סופי

א) $B_\varepsilon(x)\subseteq\bigcup_{i\in I}A_i \Leftarrow \exists i\in I\ \exists\varepsilon>0\ B_\varepsilon(x)\subseteq A_i \Leftarrow \exists i\in I, x\in A_i \Leftarrow x\in\bigcup_{i\in I}A_i$ □

ב) $n=1$, $A_i=(-\frac1i,\frac1i)$, $i\in\mathbb N$, $\bigcap_{i\in\mathbb N}A_i=\{0\}$

יא) $\{A_i\}_{i\in I}$ קבוצות סגורות $\Rightarrow$ $\bigcap_{i\in I}A_i$ סגורה; $\not\Rightarrow$ (נכון אם I סופי) $\bigcup_{i\in I}A_i$ סגורה

כמו ①: $A\leftrightarrow A^c$

סגורה $\leftrightarrow$ פתוחה

$\cup\leftrightarrow\cap$ (De Morgan)