אינטגרלים לא אמיתיים

IMPROPER INTEGRALS

שני סוגים:

"בעיה של קטע של האינטגרל"

כ"ג: $\int_a^\infty f$, $\int_{-\infty}^a f$, $\int_{-\infty}^\infty f$

הגדרות: נניח ש-f אינטגרבילית על כל תת-קטע חסום של תחום האינטגרציה.

(א) אומרים ש- $\int_a^\infty f$ מתכנס (converges) אם"ם $\lim_{b\to\infty}\left(\int_a^b f\right)\equiv\int_a^\infty f$ קיים (סופי) (ואם לא שהוא מתבדר diverges)

(ב) אומרים ש- $\int_{-\infty}^a f$ מתכנס אם"ם $\lim_{c\to-\infty}\left(\int_c^a f\right)\equiv\int_{-\infty}^a f$ קיים (סופי) (ואם לא שהוא מתבדר)

(ג) אומרים ש- $\int_{-\infty}^\infty f$ מתכנס אם"ם $\lim_{\substack{a\to\infty\\ b\to-\infty}}\left(\int_b^a f\right)\equiv\int_{-\infty}^\infty f$ קיים (סופי)

דוגמאות

(א) נניח ש- f רציפה $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ ו- F פונקציה קדומה. $\left(F(x)=\int_a^x f\right)$

לכן $\int_a^b f = [F]_a^b$

$\int_a^\infty f$ מתכנס אם"ם $\lim_{b\to\infty}F(b)$ קיים

(ב) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ מתכנס

$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, $F(x)=\tan^{-1}x$ $\Leftarrow$ $\lim_{x\to\infty}F(x)=\pi/2$

(ג) $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ מתבדר

$f(x)=\frac{1}{x}$, $F(x)=\ln x$ $\Leftarrow$ $\lim_{x\to\infty}F(x)=\infty$

$\int_a^\infty x^\alpha dx$ $(a>0)$ מתכנס אם"ם $\alpha<-1$

"בעיה של הפונקציה"

כ"ג $\int_a^b f$ כאשר f לא חסומה בסביבות של נקודות מיוחדות

הגדרה נניח ש- $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ היא פונקציה כך שקיימת מספר סופי של נקודות $\{c_i\}_{i=1}^n$ כך ש- $a\le c_1<\dots<c_n\le b$ (נקודות מיוחדות) וגם f אינטגרבילית על כל תת קטע סגור של $[a,b]\setminus\{c_1,\dots,c_n\}$

אומרים ש- $\int_a^b f$ מתכנס אם"ם לכל i,

$$\lim_{\substack{\alpha\to c_{i-1}+\\ \beta\to c_i-}}\int_\alpha^\beta f$$

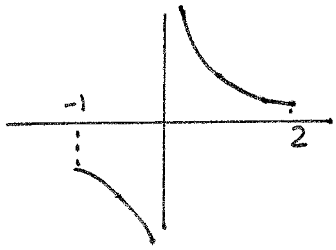
קיים, ואז נגדיר

$$\int_a^b f=\sum_{i=1}^{n+1}\lim_{\substack{\alpha\to c_{i-1}+\\ \beta\to c_i-}}\int_\alpha^\beta f$$

דוגמאות

(א) $f(x)=x^{-1/3}$ על $[-1,2]$

נקודה מיוחדת $c_1=0$



$\int_{-1}^{-\varepsilon} f=\left[\frac{3}{2}x^{2/3}\right]_{-1}^{-\varepsilon}\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}-\frac{3}{2}$

$\int_\delta^2 f=\left[\frac{3}{2}x^{2/3}\right]_\delta^2\xrightarrow[\delta\to0]{}\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{4}$

$\Leftarrow$ $\int_{-1}^2 f$ מתכנס, $\boxed{\int_{-1}^2 f=\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{4}-1\right)}$

(ב) $f(x)=1/x$ על $[-1,2]$

נקודה מיוחדת $c_1=0$

$$\left\{\begin{array}{l}\int_{-1}^{-\varepsilon} f=[\ln|x|]_{-1}^{-\varepsilon}\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}-\infty\\ \int_\varepsilon^2 f=[\ln x]_\varepsilon^2\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}\infty\end{array}\right.\Leftarrow\ \int_{-1}^2 f \text{ מתבדר}$$

אבל: $\int_{-1}^{-\varepsilon} f+\int_\varepsilon^2 f=(\ln\varepsilon-\ln1)+(\ln2-\ln\varepsilon)=\ln 2$

אותו ε

principal value

$P\int_{-1}^2 f$: מכאן מקבלים סוג אחר של אינטגרל לא אמיתי: לא מדברים עוד על זה בקורס הזה!

חשוב בפיסיקה ובאינטגרלים של פונקציות מרוכבות

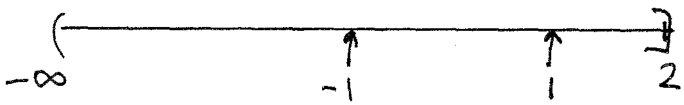
קיים אינטגרלים עם שני סוגים ביחד

דוגמאות: (א) $\int_0^\infty \frac{1}{x}\,dx$ } קטע לא חסום / פונקציה לא חסומה

(כאן את הדפים הבאים בשביל המשפטים וההוכחות מדויקים)

$$\int_0^\infty \frac{1}{x}\,dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx}_{\text{סוג השני, מתבדר}} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx}_{\text{סוג ראשון, מתבדר}} \Longrightarrow \int_0^\infty \frac{1}{x}\,dx \ \text{מתבדר}$$

(ב) $\int_{-\infty}^{2} \frac{1}{1-x^2}\,dx$



נקודות מיוחדות

$\Downarrow$

נבדוק:

$\int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{1-x^2}$	$\int_{-2}^{2} \frac{dx}{1-x^2}$
סוג ראשון	סוג שני
(מתכנס)	(מתבדר)
כמו $1/x^2$ בסביבה של ∞	כמו $1/x$ בסביבה של $-1, 1$

$\Rightarrow$ מתבדר

(ג) $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x}\,dx$ גם קטע לא חסום / גם פונקציה לא חסומה

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x}\,dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x}\,dx} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x}\,dx}$$

כמו $1/\sqrt{x}$ בסביבה של 0

$\frac{1}{e\sqrt{x}} \le \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} \le \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad x \in [0,1]$

(משפט 2')

מתכנס

$\int_1^\infty e^{-x}\,dx$ מתכנס

$\frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} < e^{-x} \qquad x \in [1,\infty)$

(משפט 2)

(מתכנס)

$\Downarrow$

האינטגרל מתכנס

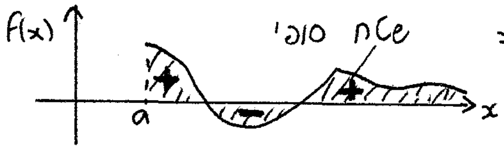
משפטים על התכנסות של אינטגרלים
לא אמתיים בצורה $\int_a^\infty$

הערה: בכל מקום נניח שהפונקציות שאנו מדברים עליהן, הן אינטגרביליות על כל תת-קטע מסוים שבתחום ההגדרה של הפונקציה.

הגדרה $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$

$\int_a^\infty f$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f$ קיים וסופי [נסמן ב- $\int_a^\infty f$]

משמעות



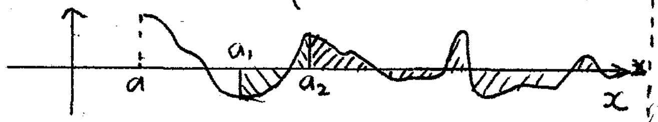
משפט 0

$\begin{cases} f:[a,\infty)\to\mathbb{R} \\ a_1, a_2\ge a\end{cases} \Rightarrow$ $\int_{a_1}^\infty f$, $\int_{a_2}^\infty f$ מתכנסים / מתבדרים יחד

הוכחה

$$\int_{a_1}^b f = \int_{a_2}^b f + \underbrace{\int_{a_1}^{a_2} f}_{\text{לא תלוי ב-}b}$$

לכן ($\lim_{b\to\infty}\int_{a_1}^b f$ קיים סופי) $\Leftrightarrow$ ($\lim_{b\to\infty}\int_{a_2}^b f$ קיים סופי)



□

משפט 1 (קריטריון של Cauchy)

$\int_a^\infty f$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $\left(\forall\varepsilon>0\ \exists B\ \forall b_1,b_2>B\ \left|\int_{b_1}^{b_2} f\right|<\varepsilon\right)$

אפשר לכתוב בצורה: $\lim_{b_1,b_2\to\infty}\left(\int_{b_1}^{b_2} f\right)=0$

הוכחה $(\Leftarrow)$ נניח ש- $\int_a^\infty f$ מתכנס. $I=\int_a^\infty f$

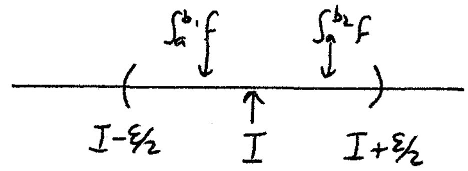
הגדרה של $\int^\infty$ $\Leftarrow$ $\lim_{b\to\infty}\left(\int_a^b f\right) = I$

הגדרה של lim $\Leftarrow$ $\forall\varepsilon>0\ \exists B\ \forall b>B\ \left|\int_a^b f - I\right|<\frac{\varepsilon}{2}$

$b_1,b_2>B \Rightarrow$ $\left|\int_{b_1}^{b_2} f\right| = \left|\left(\int_a^{b_1}f - I\right) - \left(\int_a^{b_2} f - I\right)\right|$

$\le \left|\int_a^{b_1} f - I\right| + \left|\int_a^{b_2} f - I\right|$

$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$



$(\Rightarrow)$ נניח ש- $\left(\forall\varepsilon>0\ \exists B\ \forall b_1,b_2>B\ \left|\int_{b_1}^{b_2}f\right|<\varepsilon\right)$ (*)

נגדיר $I_n=\int_a^{a+n} f$ כאשר $n\in\mathbb{N}$

(*) $\Rightarrow$ (I_n) סדרת Cauchy

(כי $|I_m-I_n| = \left|\int_{a+m}^{a+n} f\right| < \varepsilon$ לכל $m,n>B-a$)

שלמות של $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ (I_n) סדרה מתכנסת, נניח ש- $I_n \xrightarrow[n\to\infty]{} I$

צריך להוכיח ש- $\int_a^b f \xrightarrow{b\to\infty} I$

נניח $\varepsilon>0$ $\overset{(*)}{\Rightarrow}$ ① $\exists B'\ \forall b_1,b_2>B'\ \left|\int_{b_1}^{b_2} f\right|<\varepsilon/2$

$I_n\xrightarrow{n\to\infty} I$ $\Rightarrow$ ② $\exists N\ \forall n>N\ |I_n-I|<\varepsilon/2$

נגדיר $\boxed{B=\max(B', a+N)}$

צריך להוכיח $b>B \Rightarrow \left|\int_a^b f - I\right|<\varepsilon$

נניח $b>B$ $\Rightarrow$ נגדיר $n=[b-a]+1$

$n>b-a>B-a\ge N$ $\overset{②}{\Rightarrow}$ $|I_n-I|<\varepsilon/2$

$\begin{cases} b>B\ge B' \\ n+a>b>B\ge B'\end{cases}$ $\overset{①}{\Rightarrow}$ $\left|\int_{n+a}^b f\right| < \varepsilon/2$

$\left|\int_a^b f - I\right| = \left|\left(\int_a^{a+n} f - I\right) + \int_{a+n}^b f\right|$

$\le |I_n - I| + \left|\int_{a+n}^b f\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

□

$\boxed{46}$

משפט 2 (קריטריון ההשוואה) comparison test

* $f,g:[a,\infty)\to\mathbb{R}$
* $0<c\in\mathbb{R}$
* $0\le f(x)\le cg(x)$ לכל $x\in[a,\infty)$

$\Leftarrow$

(א) $\int_a^\infty g$ מתכנס $\Leftarrow$ $\int_a^\infty f$ מתכנס

(ב) $\int_a^\infty f$ מתבדר $\Leftarrow$ $\int_a^\infty g$ מתבדר

הוכחה (א)

$\int_a^\infty g$ מתכנס $\xRightarrow{\text{משפט 1}}$ $\lim\limits_{b_1,b_2\to\infty}\left(\int_{b_1}^{b_2} g\right)=0$

$0\le f(x)\le cg(x)$ $\Rightarrow$ $0\le \int_{b_1}^{b_2} f\le c\int_{b_1}^{b_2} g$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{b_1,b_2\to\infty}\left(\int_{b_1}^{b_2} f\right)=0$

$\Downarrow$ משפט 1

$\int_a^\infty f$ מתכנס

(ב) $(X\Rightarrow Y)\xRightarrow{\text{לוגיקה!}}(\neg Y\Rightarrow\neg X)$

משפט 2'

* $f,g:[a,\infty)\to\mathbb{R}$
* $g(x)>0$ לכל $x>a$
* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=c>0$

$\Leftarrow$ $\int_a^\infty f$, $\int_a^\infty g$ מתכנסים/מתבדרים יחד

הוכחה

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=c$ $\Rightarrow$ $\exists X\ \forall x>X\ \left|\frac{f(x)}{g(x)}-c\right|<\frac{c}{2}$

$\Rightarrow$ $\forall x>X\ \frac{c}{2}<\frac{f(x)}{g(x)}<\frac{3c}{2}$

$g(x)>0$ $\Rightarrow$ $\forall x>X\ \frac{c}{2}g(x)<f(x)<\frac{3c}{2}g(x)$

$\int_a^\infty g$ מתכנס $\overset{\text{משפט 0}}{\Longleftrightarrow}$ $\int_X^\infty g$ מתכנס $\underset{\substack{0\le g(x)\le\frac{2}{c}f(x)\\ \text{משפט 2}}}{\overset{\substack{\text{משפט 2}\\ 0\le f(x)\le\frac{3c}{2}g(x)}}{\rightleftarrows}}$ $\int_X^\infty f$ מתכנס $\overset{\text{משפט 0}}{\Longleftrightarrow}$ $\int_a^\infty f$ מתכנס

$\square$

משפט 3

$\int_a^\infty |f|$ מתכנס $\Rightarrow$ $\int_a^\infty f$ מתכנס

הגדרה אומרים ש- $\int_a^\infty f$ מתכנס בהחלט (absolutely convergent) אם $\int_a^\infty |f|$ מתכנס

הגדרה אומרים ש- $\int_a^\infty f$ מתכנס בתנאי (conditionally convergent) אם $\int_a^\infty f$ מתכנס ו- $\int_a^\infty |f|$ מתבדר

הוכחה

$\int_a^\infty |f|$ מתכנס $\xRightarrow{\text{משפט 1}}$ $\lim\limits_{b_1,b_2\to\infty}\int_{b_1}^{b_2}|f|=0$

$\left|\int_{b_1}^{b_2} f\right|\le\int_{b_1}^{b_2}|f|$ (אי שוויון המשולש) $\Rightarrow$ $\lim\limits_{b_1,b_2\to\infty}\int_{b_1}^{b_2} f=0$

$\xRightarrow{\text{משפט 1}}$ $\int_a^\infty f$ מתכנס

$\square$

מתבדר	מתכנס בהחלט
	מתכנס בתנאי

מסקנות ודוגמאות

(א $\int_a^\infty x^\alpha dx$ מתכנס אם"ם $\alpha<-1$
$(a>0)$

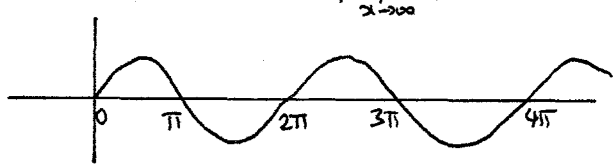
<u>הוכחה</u>
$$\int_a^b x^\alpha dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_a^b$$
הגבול קיים כאשר $b\to\infty$
אם"ם $\alpha+1<0$ ∎

(ב $|f(x)|\le Cx^\alpha$, $C>0, \alpha<-1$ $\overset{\text{משפט 2}}{\Leftarrow}$ $\int_a^\infty |f|$ מתכנס $(a>0)$ $\overset{\text{משפט 3}}{\Leftarrow}$ $\int_a^\infty f$ מתכנס

(ג $f(x)>Cx^\alpha$, $C>0, \alpha\ge -1$ $\overset{\text{משפט 2}}{\Leftarrow}$ $\int_a^\infty f$ מתבדר $(a>0)$

(ד $\int_a^\infty f$ מתכנס $\not\Leftarrow$ $f(x)\xrightarrow[x\to\infty]{}0$

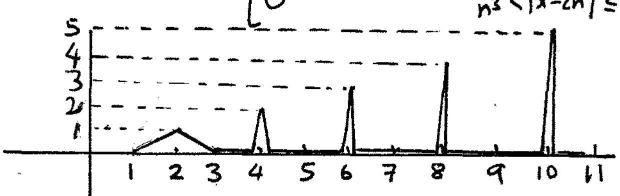
<u>דוגמא</u> $f(x)=\sin x$
$\int_a^b f(x)\,dx = [-\cos x]_a^b = \cos a-\cos b$ $\Leftarrow$ $\int_a^\infty f$ מתבדר
$f \underset{x\to\infty}{\not\to} 0$



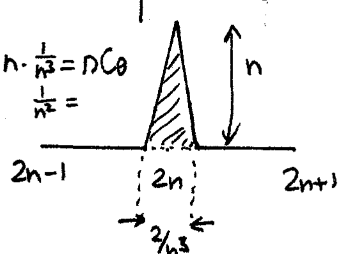
(ה $\int_a^\infty f$ מתכנס $\not\Leftarrow$ f חסומה

<u>דוגמא</u> $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$

$$n\in\mathbb{N},\quad f(x)=\begin{cases} n^4(x-2n+1/n^3) & 2n-\frac{1}{n^3}\le x\le 2n \\ n^4(2n-x+1/n^3) & 2n\le x\le 2n+\frac{1}{n^3} \\ 0 & \frac{1}{n^3}<|x-2n|\le 1 \end{cases}$$



$n\cdot\frac{1}{n^3}=$ שטח
$\frac{1}{n^2}=$



$$\int_1^{2n+1} f = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$$

f פונקציה חיובית $\Leftarrow$ $\int_1^b f$ פונקציה
עולה של b

$\Downarrow$ $\lim_{n\to\infty}\int_1^{2n+1} f$ קיים

$\lim_{b\to\infty}\int_1^b f$ קיים

$\Downarrow$

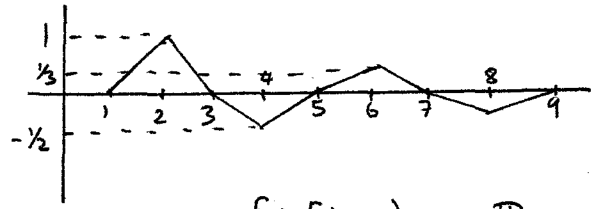
$\int_1^\infty f$ קיים

אבל f לא חסומה

1) $\int_a^\infty |f| \not\Leftarrow \int_a^\infty f$

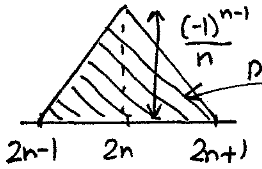
מתכנס   מתכנס

דוגמא



$$f:[1,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$$

$$n\in\mathbb{N}\qquad f(x)=\begin{cases}\frac{(-1)^n}{n}(2n-1-x) & 2n-1\le x\le 2n\\ \frac{(-1)^n}{n}(x-2n-1) & 2n\le x\le 2n+1\end{cases}$$



שטח $\int_{2n-1}^{2n+1} f = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

$$\Rightarrow \int_1^{2n+1} f = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

$$2n-1<b<2n+1 \Rightarrow \left|\int_1^b f-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right|=\left|\int_b^{2n+1}f\right| \le\left|\int_{2n-1}^{2n+1}f\right|=\frac1n\xrightarrow{n\to\infty}0$$

$$\Rightarrow \int_1^\infty f=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\ln 2$$

מתכנס

אבל $\int_1^\infty |f|$ מתבדר כי $\int_1^{2n+1}|f|=\sum_{k=1}^{n}\frac1k\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$

---

2) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$

מתכנס בתנאי

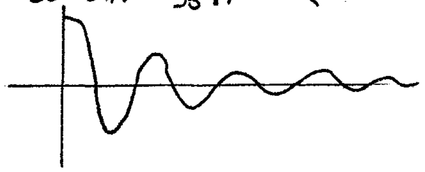
$h(x)=\frac{\sin x}{x}$

$h:(0,\infty)\to\mathbb{R}$

צריך לבדוק בסביבות של $0,\infty$

⓪ $\lim_{x\to 0} f(x)=1$ ⇐ h רציפה בסביבה של 0

⇐ $\int_0^1 h$ מתכנס



∞: $h(x)=\frac1x\cdot\sin x$

פונקציה מונוטונית יורדת $g(x)=\frac1x\xrightarrow[x\to\infty]{}0$

$\left|\int_a^b f\right|\le 2\quad\forall a,b$

$f(x)=\sin x$

$\int_1^\infty h$ מתכנס $\xLeftarrow[(4\ \text{משפט})]{\text{Dirichlet}}$

ו$\int_0^\infty |h|$ מתבדר (כמו עמ' למקרה יותר כללי)

משפט 4 (מבחן Dirichlet)

* $f,g:[a,\infty)\to\mathbb{R}$
* f רציפה
* $\left|\int_{b_1}^{b_2} f\right| \le C$ לכל $b_1,b_2\ge a$
* g גזירה
* g פונקציה מונוטונית יורדת
* $g(x)\xrightarrow{x\to\infty}0$

$\Longrightarrow$ $\int_a^\infty f(x)g(x)\,dx$ מתכנס

הוכחה f רציפה $\Leftarrow$ נגדיר $F(x)=\int_a^x f$, $F:[a,\infty)\to\mathbb{R}$

משפט היסודי $\Leftarrow$ F גזירה, $F'=f$, $\underset{\forall x\ge a}{|F(x)|\le C}$

$$\int_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)\,dx = \int_{b_1}^{b_2} F'(x)g(x)\,dx$$

$$\overset{\text{אינטגרציה לפי חלקים}}{=} \underbrace{\left[F(x)g(x)\right]_{b_1}^{b_2}}_{a} - \underbrace{\int_{b_1}^{b_2} F(x)g'(x)\,dx}_{b}$$

a: $\xrightarrow{b_1,b_2\to\infty} 0$, כי $F(x)g(x)\xrightarrow{x\to\infty}0 \Leftarrow \begin{cases}|F(x)|\le C\\ g(x)\xrightarrow{x\to\infty}0\end{cases}$

b:
$$\left|\int_{b_1}^{b_2} F(x)g'(x)\,dx\right| \le \int_{b_1}^{b_2} |F(x)|\cdot|g'(x)|\,dx \le \int_{b_1}^{b_2} C\cdot(-g'(x))\,dx = \left[-Cg(x)\right]_{b_1}^{b_2} \xrightarrow{b_1,b_2\to\infty} 0$$

לכן $\int_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)\,dx \xrightarrow{b_1,b_2\to\infty} 0$ $\overset{\text{משפט 1}}{\Longrightarrow}$ $\int_a^\infty f(x)g(x)\,dx$ מתכנס $\square$

הערה משפטים $1,2,2',3,4$ בדיוק כמו משפטים להתכנסות של טורים $\sum_{n=1}^\infty a_n$ של מספרים. אבל דוגמאות ד, ה של דף 47 לא כמו בטורים

$\left(\underset{\text{מתכנס}}{\sum_{n=1}^\infty a_n} \Rightarrow \underset{\text{סדרה חסומה } (a_n)}{a_n\xrightarrow{n\to\infty}0}\right)$

דוגמה $\underset{(\alpha>0)}{\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx}$ מתכנס $\begin{pmatrix}f(x)=\sin x\\ g(x)=1/x^\alpha\end{pmatrix}$ [משפט 5]

$\underset{(\alpha>1)}{\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx}$ מתכנס בהחלט: $\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right|<\frac{1}{x^\alpha}$ [משפט 2]

$\underset{(0<\alpha\le 1)}{\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx}$ מתכנס בתנאי: $\int_1^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x^\alpha}\,dx \ge \sum_{k=1}^{n}\int_{(k+1/6)\pi}^{(k+5/6)\pi}\frac{|\sin x|}{x^\alpha}\,dx$

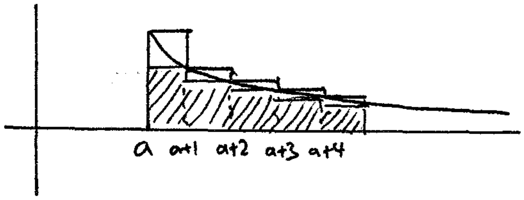
$$> \sum_{k=1}^{n} \underset{\text{אורך הקטע}}{\left(\tfrac{2}{3}\pi\right)}\cdot\underset{\text{מינימום של הפונקציה}}{\left[\frac{1}{2}\,\frac{1}{\left((k+5/6)\pi\right)^\alpha}\right]} > \frac{\pi^{1-\alpha}}{3}\sum_{k=2}^{n+1}k^{-\alpha} \xrightarrow{n\to\infty}\infty$$

משפט 5 (מבחן $\int$) [integral test for series]

$$\left\{\begin{array}{l} * \ f:[a,\infty)\to\mathbb{R} \\ * \ f(x)\geq 0 \text{ לכל } x \\ * \ f \text{ פונקציה לא עולה} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \int_a^\infty f \\ \sum_{k=0}^{\infty} f(a+k) \end{array}\right.$$

מתכנסים/מתבדרים יחד

הוכחה



כאשר $x\in[a+k,a+k+1]$,

$$f(a+k)\geq f(x)\geq f(a+k+1) \quad (f \text{ לא עולה})$$

$$\Leftarrow \quad f(a+k)\geq\int_{a+k}^{a+k+1} f\geq f(a+k+1)$$

$$\underset{m<n}{\overset{\sum_{k=m}^{n-1}}{\Leftarrow}} \quad \sum_{k=m}^{n-1} f(a+k)\overset{②}{\geq}\int_{a+m}^{a+n} f\overset{①}{\geq}\sum_{k=m+1}^{n} f(a+k)$$

סכום עליון

סכום תחתון $=\sum_{k=m}^{n-1} f(a+k+1)$

$\boxed{\int\Rightarrow\sum}$

$\int_a^\infty f$ מתכנס $\overset{\text{משפט 1}}{\Rightarrow} \int_{b_1}^{b_2} f \xrightarrow[b_1,b_2\in\mathbb{R}]{b_1,b_2\to\infty} 0 \Rightarrow \int_{a+m}^{a+n} f \xrightarrow[m,n\in\mathbb{N}]{m,n\to\infty} 0 \overset{①}{\Rightarrow} \sum_{k=m+1}^{n} f(a+k) \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0$

$\Downarrow$ קריטריון Cauchy (לטורים)

$\sum_{k=0}^{\infty} f(a+k)$ מתכנס

$\boxed{\sum\Rightarrow\int}$

$\sum_{k=0}^{\infty} f(a+k)$ מתכנס $\overset{\text{קריטריון Cauchy לטורים}}{\Rightarrow} \sum_{k=m}^{n-1} f(a+k) \xrightarrow{m,n\to\infty} 0 \overset{②}{\Rightarrow} \int_{a+m}^{a+n} f \xrightarrow[m,n\in\mathbb{N}]{m,n\to\infty} 0$

$\Downarrow$

$$\left(0\leq\int_{b_1}^{b_2} f \overset{f\geq 0}{\leq} \int_{a+m}^{a+n} f\right)$$

$m=[b_1-a]$ $(\Rightarrow a+m\leq b_1)$

$n=[b_2-a]+1$ $(\Rightarrow a+n>b_2)$

$\int_{b_1}^{b_2} f \xrightarrow[b_1,b_2\in\mathbb{R}]{b_1,b_2\to\infty} 0 \overset{\text{משפט 1}}{\Longrightarrow} \int_a^\infty f$ מתכנס

$\square$

דוגמא

$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha}$ מתכנס $\overset{\text{משפט 5}}{\Longleftrightarrow}$ $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ מתכנס

$(\alpha>0)$

$$\int_a^b \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha}=\left[\frac{(\ln x)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_a^b$$

תנאי: $\alpha>1$

הערות ① $\alpha>0 \Leftarrow \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}$ פונקציה יורדת ולכן אפשר להשתמש במשפט 5

② $\alpha\leq 0 \Leftarrow \int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha}$ מתבדר

[כאשר $x\to\infty$, $\frac{1}{x(\ln x)^\alpha} >> \frac{1}{x}$]

דוגמא

$\int_3^\infty \frac{dx}{x\ln x(\ln\ln x)^\alpha}$ מתכנס $\overset{\text{משפט 5}}{\Longleftrightarrow}$ $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^\alpha}$ מתכנס

$(\alpha>0)$

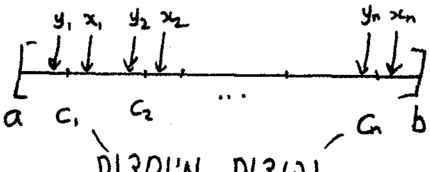
$$\int\frac{dx}{x\ln x(\ln\ln x)^\alpha}=\frac{(\ln\ln x)^{1-\alpha}}{1-\alpha}+\text{קבוע}$$

תנאי: $\alpha>1$

משפטים על התכנסות של אינטגרלים

לא אמתיים בצורה $\int_a^b f$

(f לא חסומה)

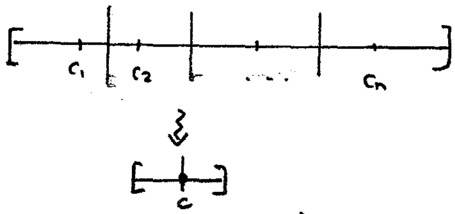


הגדרה:

$$\int_a^b f = \lim_{y_1\to c_1-}\left(\int_a^{y_1} f\right) + \lim_{\substack{x_1\to c_1+\\ y_2\to c_2-}}\left(\int_{x_1}^{y_2} f\right) + \dots + \lim_{x_n\to c_n+}\left(\int_{x_n}^{b} f\right)$$

וקיים אמ"מ כל הגבולות קיימים.

אפשר לחתוך את $[a,b]$ ו- $\int_a^b f$ לתת-קטעים כך שבכל אחד יש רק נקודה מיוחדת אחד והיא בקצה



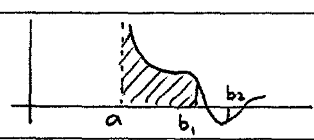
לכן מספיק לדבר על $\int_a^b f$ כאשר $x=a$ נקודה מיוחדת היחידה ב- $[a,b]$

<u>הערה</u> עכשיו מדברים על פונקציות $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ כך שהן אינטגרביליות על כל תת-קטע סגור ($[x,b]$ $(x>a)$)

<u>הגדרה</u> $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ אז: $\int_a^b f$ מתכנס אמ"מ $\lim_{x\to a+}\int_x^b f$ קיים סופי.

<u>דוגמא</u> $\int_0^1 x^\alpha dx$ מתכנס לכל $-1<\alpha$.

<u>משפט 0^*</u> $f:(a,b]\to\mathbb{R}$, $b_1,b_2\in(a,b]$ $\Leftarrow$ $\left\{\begin{matrix}\int_a^{b_1} f\\ \int_a^{b_2} f\end{matrix}\right.$ מתכנסים/מתבדרים יחד



<u>משפט 1^*</u> (קריטריון של Cauchy)

$\int_a^b f$ מתכנס $\iff$ $\left(\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall a_1,a_2\in(a,a+\delta)\ \left|\int_{a_1}^{a_2} f\right|<\varepsilon\right)$

$\iff$ $\lim_{a_1,a_2\to a+}\int_{a_1}^{a_2} f = 0$

<u>הערות</u> ① כמו משפט 1, רק החלפנו את הסביבה (B,∞) של ∞ לסביבה $(a,a+\delta)$ של a.

② אותו הוכחה: ($\Leftarrow$) בדיוק אותו דבר

($\Rightarrow$) להחליף הגדרה של I_n ל- $I_n=\int_{a+1/n}^b f$

סדרה $a+1/n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$

(כמו היתה סדרה $a+n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$)

<u>משפט 2^*</u>

* $f,g:(a,b]\to\mathbb{R}$
* $0<c\in\mathbb{R}$
* $\forall x\in(a,b],\ 0\le f(x)\le cg(x)$

$\Leftarrow$

(א) $\int_a^b g$ מתכנס $\Leftarrow$ $\int_a^b f$ מתכנס

(ב) $\int_a^b f$ מתבדר $\Leftarrow$ $\int_a^b g$ מתבדר

<u>משפט $2'^*$</u>

* $f,g:(a,b]\to\mathbb{R}$
* $g(x)>0$ לכל $x\in(a,b]$
* $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=c>0$

$\Leftarrow$ $\left\{\begin{matrix}\int_a^{b} f\\ \int_a^{b} g\end{matrix}\right.$ מתכנסים/מתבדרים יחד

הגדרה אומרים ש- $\int_a^b f$ **מתכנס בהחלט**
אם"ם $\int_a^b |f|$ מתכנס

הגדרה אומרים ש- $\int_a^b f$ **מתכנס בתנאי**
אם"ם $\int_a^b f$ מתכנס ו- $\int_a^b |f|$ מתבדר

משפט 3* $\int_a^b |f|$ מתכנס $\Rightarrow$ $\int_a^b f$ מתכנס
(כאן $f:(a,b]\to\mathbb{R}$)

הוכחה בדיוק כמו למשפט 3.

משפט 4*
- $f,g:(a,b]\to\mathbb{R}$
- f רציפה
- $\exists C\ \forall a_1,a_2\in(a,b]\ \left|\int_{a_1}^{a_2} f\right|\le C$
- g רציפה, מונוטונית עולה
- $g(x)\xrightarrow{x\to a} 0$

$\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ מתכנס.

מסקנה של 2*

(א) $|f(x)|\le \frac{C}{(x-a)^\alpha}$, $C>0,\ \alpha<1$ $\Rightarrow$ $\int_a^b f$ מתכנס בהחלט

(ב) $f(x)> \frac{C}{(x-a)^\alpha}$, $C>0,\ \alpha\ge 1$ $\Rightarrow$ $\int_a^b f$ מתבדר

דוגמאות

א) $\boxed{\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx}$: נקודות מיוחדות $x=0,\infty$

$x=0$ $\frac{\sin x}{x^\alpha}\sim x^{1-\alpha}$

הגדרה $f(x)\overset{x\to a}{\sim} g(x)$
אם"ם $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$
קיים סופי ולא מאפס

משפט 2* $\Rightarrow$ $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ מתכנס בהחלט
אם"ם $\int_0^1 x^{1-\alpha}dx$ מתכנס
$\Leftrightarrow$ $1-\alpha>-1$ $\Leftrightarrow$ $\alpha<2$

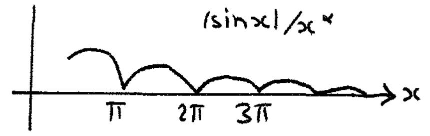
$x=\infty$ $\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right|<\frac{1}{|x|^\alpha}$

משפט 2 $\Rightarrow$ $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ מתכנס בהחלט כאשר $\alpha>1$

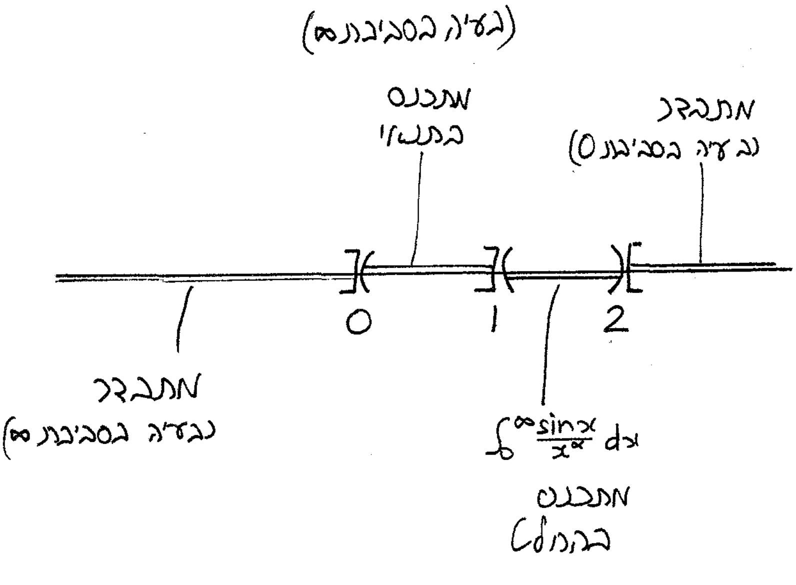
משפט 4 $\Rightarrow$ $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ מתכנס כאשר $\alpha>0$

טענה $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x^\alpha}dx$ מתבדר כאשר $0<\alpha\le 1$

הוכחה

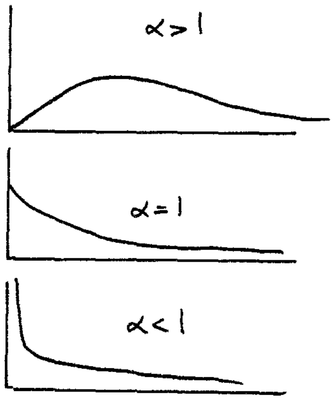


$$\int_1^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x^\alpha}dx > \sum_{k=1}^{n}\int_{k\pi+\pi/6}^{k\pi+5\pi/6}\frac{|\sin x|}{x^\alpha}dx$$
$$> \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}\,\frac{1}{(k\pi+5\pi/6)^\alpha}$$
$$> \frac{\pi^{1-\alpha}}{3}\sum_{k=2}^{n+1}k^{-\alpha}\xrightarrow{n\to\infty}\infty$$
$\square$



ב) פונקציה Gamma $\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt$

נקודות מיוחדות: $t=0,\infty$



$$\Gamma(\alpha)=\int_0^1 t^{\alpha-1}e^{-t}dt+\int_1^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt$$

$\frac{1}{e}t^{\alpha-1}\le t^{\alpha-1}e^{-t}\le t^{\alpha-1}$ על $[0,1]$

$0<t^{\alpha-1}e^{-t}<1/t^2$ לכל t מספיק גדול

מתכנס אמ"מ $\int_0^1 t^{\alpha-1}dt$ מתכנס $\Leftrightarrow \alpha>0$

מתכנס לכל α

לכן $\Gamma(\alpha)$ מוגדרת היטב כאשר $\alpha>0$

אינטגרציה לפי חלקים: ($\alpha>0$)

$$\int_a^b t^\alpha e^{-t}dt=\left[-t^\alpha e^{-t}\right]_a^b+\int_a^b(\alpha t^{\alpha-1})e^{-t}dt$$

$$=-b^\alpha e^{-b}+a^\alpha e^{-a}+\alpha\int_a^b t^{\alpha-1}e^{-t}dt$$

$$\Gamma(\alpha+1)\qquad 0\ (a\to0,\ b\to\infty)\qquad \alpha\Gamma(\alpha)\ (a\to0,\ b\to\infty)$$

$$\boxed{\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)}\quad(\alpha>0)$$

$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}dt=1 \Rightarrow \underline{\Gamma(n)=(n-1)!}$ לכל $n\in\mathbb{N}$

ג) $I=\int_1^\infty\underbrace{\frac{\tan^{-1}x}{x\ln^2(1+x)}}_{\text{חיובי}}dx$: כאשר $x\in[1,\infty)$ $\pi/4\le\tan^{-1}x<\pi/2$ $\underset{\text{משפט } 2'}{\Longleftarrow}$ I מתכנס\מתבדר לפי ההתכנסות של $\int_1^\infty\frac{dx}{x\ln^2(1+x)}$

וזו של $\int_1^\infty\frac{dx}{x\ln^2x}$ ← מתכנס

$$\int\frac{dx}{x\ln^2x}=-\frac{1}{\ln x}+\text{קבוע}$$

ד) בעזרת הצבה אפשר להפוך אינטגרל לא אמתי מסוג ראשון לסוג שני או אינטגרל לא כזה:

$$\int_0^1\frac{x^\alpha}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^\alpha d\theta$$

סביבת 0: מתכנס $\alpha>-1$ סביבת 0: מתכנס $\alpha>-1$

סביבת 1: מתכנס