<u>הוכחה (⇒)</u> נניח ש- $\begin{cases} f\in\mathcal{R}[a,b] \\ I=\int_a^b f \\ \varepsilon>0 \end{cases}$. צריך להוכיח

$$\left(\begin{array}{l} \exists\delta>0\ \forall \underset{(\overset{a}{\overset{\shortparallel}{u_0}}<u_1<\dots<\overset{b}{\overset{\shortparallel}{u_m}})}{U}: \Delta(U)<\delta\ \ \forall t_j\in(u_{j-1},u_j) \\ \Rightarrow \left|\sum_{j=1}^m (u_j-u_{j-1})f(t_j) - I\right| < 2\varepsilon \end{array}\right)$$

$$f\in\mathcal{R}[a,b] \Rightarrow 0=\inf_T\left(\bar{S}_T(f)-\underline{S}_T(f)\right) \overset{\varepsilon>0}{\Rightarrow} \exists T=(\overset{a}{\overset{\shortparallel}{x_0}}<x_1<\dots<\overset{b}{\overset{\shortparallel}{x_n}}): \bar{S}_T(f)-\underline{S}_T(f)<\varepsilon$$

$$f\in\mathcal{R}[a,b] \Rightarrow f\in\mathcal{B}[a,b] \Rightarrow \left(\exists M_1,M_2\ \forall x\in[a,b],\ M_1\le f(x)\le M_2\right)$$

נגדיר $\delta=\frac{\varepsilon}{2n(M_2-M_1)}$.

נניח ש- $U=(u_0<u_1<\dots<u_m)$ כך ש- $\Delta(U)<\delta$. מספיק להוכיח כי

$$\forall t_j\in(u_{j-1},u_j),\quad \left|\sum_{j=1}^m (u_j-u_{j-1})f(t_j) - I\right| < 2\varepsilon$$

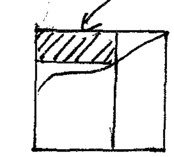
<u>למה</u> $\begin{cases} *\ \forall x\in[a,b],\ M_1\le f(x)\le M_2 \\ *\ U=(\overset{a}{\overset{\shortparallel}{u_0}}<\dots<\overset{b}{\overset{\shortparallel}{u_m}}) \\ *\ p\in(a,b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{S}_U(f)-\Delta(U)(M_2-M_1)\le\bar{S}_{U\cup\{p\}}(f)\le\bar{S}_U(f) \\ \underline{S}_U(f)\le\underline{S}_{U\cup\{p\}}(f)\le\underline{S}_U(f)+\Delta(U)(M_2-M_1) \end{cases}$

$U\cup\{p\}$ היא החלוקה שמקבלים מ- U
אחרי שנוסיף נקודה אחת p.

<u>הוכחה</u> <u>אם קיים j כך ש- $p=u_j$</u> $\Rightarrow U\cup\{p\}=U$ ואין מה להוכיח.

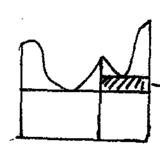
לכן <u>נניח ש- $\forall j\ p\neq u_j$</u> $\Rightarrow \exists j: u_{j-1}<p<u_j$

אז ההבדל בין $\bar{S}_U(f), \bar{S}_{U\cup\{p\}}(f)$ הוא רק בקטע: $(u_{j-1},u_j)\to(u_{j-1},p)\cup(p,u_j)$



u_{j-1} p u_j

$$\bar{S}_U(f)-\bar{S}_{U\cup\{p\}}(f)=\left((u_j-u_{j-1})\sup_{(u_{j-1},u_j)}f\right)-\left((u_j-p)\sup_{(p,u_j)}f+(p-u_{j-1})\sup_{(u_{j-1},p)}f\right)$$



u_{j-1} p u_j

$$\underline{S}_{U\cup\{p\}}(f)-\underline{S}_U(f)=\left((u_j-p)\inf_{(p,u_j)}f+(p-u_{j-1})\inf_{(u_{j-1},p)}f\right)-(u_j-u_{j-1})\inf_{(u_{j-1},u_j)}f$$

$$\bar{S}_U(f)-\bar{S}_{U\cup\{p\}}(f)=(u_j-p)\left[\sup_{(u_{j-1},u_j)}f-\sup_{(p,u_j)}f\right]+(p-u_{j-1})\left[\sup_{(u_{j-1},u_j)}f-\sup_{(u_{j-1},p)}f\right]$$

$0\le\sup_I f-\sup_J f\le M_2-M_1$ כאשר $[a,b]\supseteq I\supseteq J$

$$\in\left[0,(M_2-M_1)(u_j-u_{j-1})\right]\subseteq\left[0,(M_2-M_1)\Delta(U)\right]$$

$$\underline{S}_{U\cup\{p\}}(f)-\underline{S}_U(f)=(u_j-p)\left[\inf_{(p,u_j)}f-\inf_{(u_{j-1},u_j)}f\right]+(p-u_{j-1})\left[\inf_{(u_{j-1},p)}f-\inf_{(u_{j-1},u_j)}f\right]$$

$0\le\inf_J f-\inf_I f\le M_2-M_1$ כאשר $[a,b]\supseteq I\supseteq J$

$$\in\left[0,(M_2-M_1)(u_j-u_{j-1})\right]\subseteq\left[0,(M_2-M_1)\Delta(U)\right]$$

□

<u>המשך של הוכחה (⇒)</u>

מהלמה, אם אנו מוסיפים n נקודות $(U \to T \cup U)$

$$\begin{cases} \overline{S}_U(f) \le \overline{S}_{T\cup U}(f) + \frac{\varepsilon}{2} \xLeftarrow{\Delta(U)<\delta} \overline{S}_U(f) - n\Delta(U)(M_2-M_1) \le \overline{S}_{T\cup U}(f) \\ \underline{S}_U(f) \ge \underline{S}_{T\cup U}(f) - \frac{\varepsilon}{2} \xLeftarrow{\Delta(U)<\delta} \underline{S}_{T\cup U}(f) \le \underline{S}_U(f) + n\Delta(U)(M_2-M_1) \end{cases}$$

$$\overline{S}_U(f) - \underline{S}_U(f) \le \overline{S}_{T\cup U}(f) - \underline{S}_{T\cup U}(f) + \varepsilon$$

$$\underset{\substack{\text{כי} \\ \overline{S}_{T\cup U}(f) \le \overline{S}_T(f) \\ \underline{S}_{T\cup U}(f) \ge \underline{S}_T(f)}}{\le} \overline{S}_T(f) - \underline{S}_T(f) + \varepsilon \underset{\substack{\text{הבחירה} \\ \text{של } T}}{<} \varepsilon + \varepsilon$$

לכן $\sum_{j=1}^{m} (u_j - u_{j-1}) f(t_j)$ $(t_j \in (u_{j-1}, u_j))$ ו- I הם שני מספרים שייך לקטע $\underset{\text{אורך} < 2\varepsilon}{[\underline{S}_U(f), \overline{S}_U(f)]}$

$$\Leftarrow \quad \left| \sum_{j=1}^{m} (u_j - u_{j-1}) f(t_j) - I \right| < 2\varepsilon$$

$\square$