הוכחה של כלל L'Hôpital בצורה $\frac{\infty}{\infty}$ (הערה: אנו לא צריכים להניח ש- $\lim_{x\to a+} f(x)=\infty$)

מקרה א': $\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K$ קיים (סופי)

$\lim_{x\to a+} g(x)=\infty \Rightarrow \exists h>0: \forall x\in(a,a+h],\ g(x)>0$

נבחר $0<\varepsilon$ $\overset{\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K}{\Rightarrow}$ $\left(\exists x_0\in(a,a+h]: \forall x\in(a,x_0)\ \left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-K\right|<\frac{\varepsilon}{2}\right)$

$\lim_{x\to a+} g(x)=\infty \Rightarrow \left(\exists \overset{\delta<x_0-a}{\delta>0}: \forall x\in(a,a+\delta)\quad g(x)>\max\left(g(x_0),\ \frac{2}{\varepsilon}|f(x_0)-Kg(x_0)|\right)\right)$

$\boxed{\text{צריך להוכיח כי } \left(x\in(a,a+\delta)\Rightarrow\left|\frac{f(x)}{g(x)}-K\right|<\varepsilon\right)}$

$x\in(a,a+\delta) \Rightarrow \exists c\in(x,x_0): \frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}$ (f,g רציפות על $[x,x_0]$, $g'(y)\neq 0$ על $[x,x_0]$)

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-K\right| = \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{g(x)} - K\frac{g(x)-g(x_0)}{g(x)} + \frac{f(x_0)}{g(x)} - K\frac{g(x_0)}{g(x)}\right|$$

$$\leq \underbrace{\left|\underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}}_{=f'(c)/g'(c)}-K\right|}_{<\varepsilon/2}\cdot\underbrace{\left|1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\right|}_{<1}+\underbrace{\left|\frac{f(x_0)-Kg(x_0)}{g(x)}\right|}_{<\varepsilon/2}$$

$<\varepsilon$

לכן $\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=K$ □

מקרה ב': $\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים (לא סופי) $(=\infty)$

$\lim_{x\to a+} g(x)=\infty \Rightarrow \exists h>0: \forall x\in(a,a+h],\ g(x)>0$

נבחר M $\overset{\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty}{\Rightarrow}$ $\left(\exists x_0\in(a,a+h]: \forall x\in(a,x_0)\ \frac{f'(x)}{g'(x)}>2M\right)$

$\lim_{x\to a+} g(x)=\infty \Rightarrow \left(\exists \overset{\delta<x_0-a}{\delta>0}: \forall x\in(a,a+\delta)\quad g(x)>\max\left(3g(x_0),\ \frac{3}{M}|f(x_0)|\right)\right)$

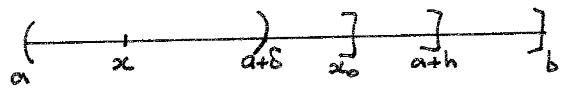
$\boxed{\text{צריך להוכיח כי } \left(x\in(a,a+\delta)\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}>M\right)}$

$x\in(a,a+\delta) \Rightarrow \exists c\in(x,x_0): \frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}$ (f,g רציפות על $[x,x_0]$, $g'(y)\neq 0$ על $[x,x_0]$)

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}}_{=f'(c)/g'(c)\ >2M}\cdot\underbrace{\frac{g(x)-g(x_0)}{g(x)}}_{=1-g(x_0)/g(x)\ >2/3}+\underbrace{\frac{f(x_0)}{g(x)}}_{\in(-M/3,\,M/3)}$$

$$> 2M\cdot\frac{2}{3}-\frac{M}{3}=M$$

לכן $\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$



□

דוגמאות

① $$\lim_{x\to 0} x\ln x \underset{0\cdot(-\infty)}{=} \lim_{x\to0}\frac{\ln x}{1/x} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{\text{כלל L'Hôpital}}{=}} \lim_{x\to0}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to0}(-x)=0$$

$f(x)=\ln x$, $g(x)=1/x$

② $$\ln\lim_{x\to\pi/2}(\tan x)^{\sin 2x}\ (\infty^0) = \lim_{x\to\pi/2}(\sin 2x)\cdot\ln(\tan x)\ (0\cdot\infty) = \lim_{x\to\pi/2}\frac{\ln(\tan x)}{\frac{1}{\sin 2x}}\ \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{כלל}}{\underset{\text{L'Hôpital}}{=}} \lim_{x\to\pi/2}\underbrace{\frac{\frac{1/\cos^2 x}{\tan x}}{-\frac{2\cos 2x}{\sin 2x}}}_{=-\tan 2x}=0$$

③ $$\lim_{y\to\infty} y(\sqrt[y]{x}-1)\ (\infty\cdot 0) \underset{y=\frac{1}{t}}{=} \lim_{t\to0+}\frac{x^t-1}{t}\ \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{כלל}}{\underset{\text{L'Hôpital}}{=}} \lim_{t\to0+}\frac{(\ln x)\cdot x^t}{1}=\ln x$$

$f(t)=x^t-1$, $g(t)=t$

נוסחת Taylor

* p פולינום בעלת מעלה n

$$\begin{cases} p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \\ p'(x)= a_1+\cdots+na_nx^{n-1} \\ \vdots \\ p^{(n)}(x)= n!\,a_n \end{cases} \Rightarrow \quad p^{(r)}(0)=a_r\cdot r! \quad (0\le r\le n), \qquad p^{(r)}(0)=0 \quad (r>n)$$

נגדיר פולינום q ע"י

$q(t)=p(t+x_0)$

$p(x)=q(x-x_0) \underset{\text{Maclaurin}}{=} \sum_{r=0}^{n} \frac{q^{(r)}(0)}{r!}(x-x_0)^r = \sum_{r=0}^{n} \frac{p^{(r)}(x_0)}{r!}(x-x_0)^r$ □

נוסחת MacLaurin לפולינומים: $p(x)=\sum_{r=0}^{n}\frac{p^{(r)}(0)}{r!}x^r$

נוסחת Taylor לפולינומים: לכל x_0, $p(x)=\sum_{r=0}^{n}\frac{p^{(r)}(x_0)}{r!}(x-x_0)^r$

קיים פולינום יחיד בעלת מעלה n עם ערכים של הפונקציה והנגזרות עד n פעמים נתונים בנקודה $x=x_0$.

(כלומר: p פולינום בעלת מעלה n

$$\begin{cases} p(x_0)=P_0 \\ \vdots \\ p^{(n)}(x_0)=P_n \end{cases} \Leftrightarrow \quad p(x)=\sum_{r=0}^{n}\frac{P_r}{r!}(x-x_0)^r$$

הגדרה נניח ש-f פונקציה גזירה n פעמים בנקודה x_0. אזי הטור

$$p_n^f(x)=\sum_{r=0}^{n}\frac{f^{(r)}(x_0)}{r!}(x-x_0)^r = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

נקרא טור Taylor של f עד מקום ה-n-י סביב נקודה x_0, והסכום שלו נקרא פולינום Taylor של f בעלת מעלה n סביב נקודה x_0.

דוגמאות

① $f(x)=x^3+x^2+4$

$f'(x)=3x^2+2x$

$f''(x)=6x+2$

$f^{(3)}(x)=6$

$f^{(r)}(x)=0 \quad (r>3)$

$x_0=0$

$P_0=4$

$P_1=4+0\cdot x=4$

$P_2=4+0\cdot x+\frac{2}{2!}x^2=x^2+4$

$P_3=4+0\cdot x+\frac{2}{2!}x^2+\frac{6}{3!}x^3=x^3+x^2+4$

$P_r=f \quad (r>3)$

$x_0=1$

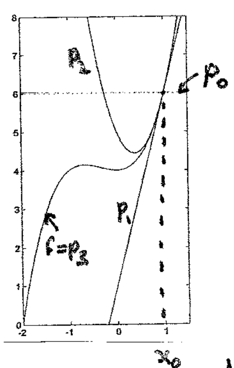
$P_0=6$

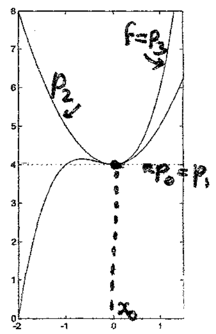
$P_1=6+5(x-1)=5x+1$

$P_2=6+5(x-1)+\frac{8}{2!}(x-1)^2=4x^2-3x+5$

$P_3=6+5(x-1)+\frac{8}{2!}(x-1)^2+\frac{6}{3!}(x-1)^3=x^3+x^2+4$

$P_r=f \quad (r>3)$





② f פולינום בעלת מעלה N $\Rightarrow p_n^f(x)=f(x)$ לכל $n\ge N$

③ $p_n^{(r)}(x_0)=f^{(r)}(x_0)$ לכל $0\le r\le n$

④ $f(x)=e^x$, $x_0=0$ $\Rightarrow$ $p_n^f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$

מעניין לנו: מה קורה כאשר $n\to\infty$: האם (מתי) $\{p_n^f(x)\}$ מתכנסת והאם הגבול (מתי) $f(x)$.

א5

<u>הערה</u> p_n^f הוא פולינום יחיד בעל מעלה n כך ש- $\frac{d^r f}{dx^r}\Big|_{x=x_0} = \frac{d^r(p_n^f)}{dx^r}\Big|_{x=x_0}$ לכל r, $0\le r\le n$

<u>הגדרה</u> $R_n(x)\equiv f(x)-p_n^f(x)$ נקראת <u>השארית</u> (remainder)

<u>תכונות</u> (א) $R_n^{(r)}(x_0)=0$ לכל r, $0\le r\le n$

(ב) $R_n(x)=o((x-x_0)^n)$ כאשר $x\to x_0$ (כלומר $\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0$)

<u>הוכחה</u>

$R_n = f-$ פולינום, f גזירה n פעמים ב-x_0 ⇐ R_n גזירה n פעמים ב-x_0

$R_n(x_0)=\dots=R_n^{(n)}(x_0)=0$

$g(x)=(x-x_0)^n$ ⇐ $g(x_0)=\dots=g^{(n-1)}(x_0)=0$, $g^{(n)}(x_0)=n!\neq 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{R_n^{(n)}(x_0)}{n!}=0$$ □

(ג) $p_n^f=p$ <u>פולינום יחיד</u> בעל מעלה n כך ש- $f(x)-p(x)=o((x-x_0)^n)$ כאשר $x\to x_0$

<u>הוכחה</u> נניח ש- p פולינום כך ש- $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-p(x)}{(x-x_0)^n}=0$

(ב) ⇐ $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-p_n^f(x)}{(x-x_0)^n}=0$

הפרש ⇐ $\lim_{x\to x_0}\frac{p(x)-p_n^f(x)}{(x-x_0)^n}=0$

למה 2 ⇓

$p_n^f-p\equiv 0$ □

<u>למה 1</u> * p פולינום בעל מעלה n, * $\lim_{x\to 0}\frac{p(x)}{x^n}=0$ ⇐ $p\equiv 0$

הוכחה $p(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$

נניח בשלילה ש- $p\not\equiv 0$

⇐ קיים $r\le n$ הכי קטן: $a_r\neq 0$ ($a_i=0\ \forall i<r$)

$\lim_{x\to 0}\frac{p(x)}{x^n}=0$ ⇐ $\lim_{x\to 0}\frac{p(x)}{x^r}=0$

$\frac{p(x)}{x^r}=a_r+a_{r+1}x+\dots+a_nx^{n-r}$ ⇐ $a_r=0$ ※ □

<u>למה 2</u> * p פולינום בעל מעלה n, * $\lim_{x\to x_0}\frac{p(x)}{(x-x_0)^n}=0$ ⇐ $p\equiv 0$

הוכחה נגדיר פולינום q ע"י $q(t)=p(t+x_0)$

$\lim_{x\to x_0}\frac{p(x)}{(x-x_0)^n}=0 \xRightarrow{t=x-x_0} \lim_{t\to 0}\frac{q(t)}{t^n}=0$

למה 1 ⇓

$q\equiv 0 \Rightarrow p\equiv 0$ □

<u>דוגמאות</u>

א) $f(x)=x^3+x^2+4$, $x_0=1$

$$p_2^f(x)=6+5(x-1)+\frac{8}{2}(x-1)^2$$
$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$
$$=4x^2-3x+5$$

$$R_2(x)=f(x)-p_2^f(x)=(x-1)^3 = o((x-1)^2)$$

ב) $f(x)=e^x$, $x_0=0$

$f^{(n)}(x_0)=1\ \forall n$

$p_2^f(x)=1+x+\frac{x^2}{2}$

$R_2(x)=e^x-1-x-\frac{x^2}{2}=o(x^2)$

$$e^{0.1}=f(0.1)=1+0.1+\frac{(0.1)^2}{2!}+R_2(0.1)$$

מה הגודל כאן?

שאלות שמעניינים לנו:

יודעים של- n קבוע, $R_n(x)=o((x-x_0)^n)$, כאשר $x\to x_0$

<u>אבל</u>

* מה קורה ל- $R_n(x)$ (כאשר $n\to\infty$, x קבוע)?

* אם רוצים לחשב $f(0.1)$ מהטור Taylor של f בסביבת 0, עד 10^{-4}, אזה $p_n^f(0.1)$ מספיק לנו?