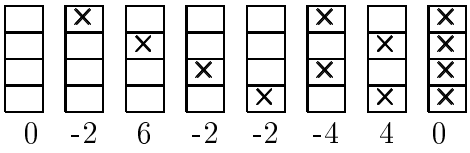
סמסטר ב', מועד ב', תשס"א
מספר התלמיד_____ תאריך הבחינה: 18.10.2001
מספר קורס: 0365-1102

בחינה במבוא להסתברות

המורה: פרופ' בוריס צירלסון

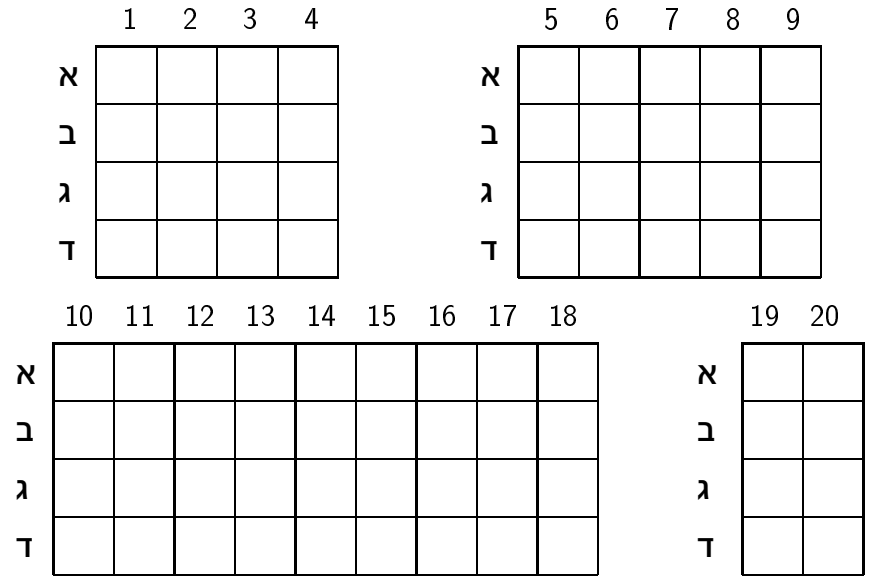
משך הבחינה: 3 שעות.
מותר להשתמש בדף סכום אישי, ובמחשב כיס.
השאלון מורכב מ-20 שאלות המבוססות על 4 סוגיות. רצוי לענות על כולן.
לכל שאלה ניתנות 3 תשובות. סמן בטבלת התשובות את התשובה הנראית לך נכונה.
באם כל התשובות נראות לך לא נכונות סמן (ד).
סימון התשובה הנכונה במקום המתאים בטבלה שבתחתית עמוד זה מזכה ב-6 נקודות זכות. סימון תשובה לא נכונה נושא שתי נקודות חובה.
הנבחן רשאי לסמן יותר מתשובה אחת באותה שאלה.

דוגמה:



סה"כ הנקודות האפשרי הוא 120.
לעזרתך מצורפת רשימת נוסחאות.

בהצלחה!



סוגיה 1

כד מכיל 15 כדורים לבנים ו- 5 כדורים שחורים. בוחרים באופן מקרי מדגם בגודל 10 עם החזרה. יהיו

X_1 - מספר כדורים לבנים במדגם (לאו דווקא שונים),

X_2 - מספר כדורים שחורים במדגם (לאו דווקא שונים),

$Y_1 = (-1)^{X_1}$,

$Y_2 = (-1)^{X_2}$,

E_1 - המאורע " X_1 הוא מספר זוגי",

E_2 - המאורע " X_2 הוא מספר זוגי".

---

1. מקדם המתאם בין X_1 ל- X_2 הוא

(א) $R(X_1, X_2) = +1$.

(ב) $R(X_1, X_2) = 0$.

(ג) $R(X_1, X_2) = -1$.

.....

2. מקדם המתאם בין Y_1 ל- Y_2 הוא

(א) $R(Y_1, Y_2) = 0$.

(ב) $R(Y_1, Y_2) = -1$.

(ג) $R(Y_1, Y_2) = +1$.

.....

3. התוחלת של Y_1 היא

(א) $\mathbb{E}(Y_1) = (-1)^{3/4}$.

(ב) $\mathbb{E}(Y_1) = \frac{1}{3^{10}}$.

(ג) $\mathbb{E}(Y_1) = 0$.

רמז: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ לכל a, b , חיוביים או שליליים. (יש גם דרך אחרת.)

.....

4. ההסתברות של E_1 היא

(א) $\mathbb{P}(E_1) = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2^{10}})$.

(ב) $\mathbb{P}(E_1) < 0.5$.

(ג) $\mathbb{P}(E_1) = 0.5$.

סוגיה 2

כד מכיל 10 כדורים לבנים, 10 כדורים אדומים ו- 10 כדורים שחורים. בוחרים באופן מקרי מדגם בגודל 4 עם החזרה. יהיו

X_1 - מספר כדורים לבנים במדגם (לאו דווקא שונים),

X_2 - מספר כדורים אדומים במדגם (לאו דווקא שונים),

X_3 - מספר כדורים שחורים במדגם (לאו דווקא שונים),

$Y_k = (-1)^{X_k}$ (עבור $k = 1, 2, 3$),

E_k - המאורע " X_k הוא מספר זוגי" (עבור $k = 1, 2, 3$).

---

5. מקדם המתאם בין X_1 ל- X_2 הוא

(א) $R(X_1, X_2) = 0$.

(ב) $R(X_1, X_2) = -1/2$.

(ג) $R(X_1, X_2) = -1/3$.

רמז: התבוננו(י) ב- $\mathbb{V}\left(X_1 + X_2 + X_3\right)$.

.....

6. התוחלת של Y_1 היא

(א) $\mathbb{E}(Y_1) = \frac{1}{16}$.

(ב) $\mathbb{E}(Y_1) = \frac{1}{81}$.

(ג) $\mathbb{E}(Y_1) = 0$.

.....

7.

(א) $\mathbb{E}(Y_1 Y_2) = \big(\mathbb{E}(Y_1)\big)\big(\mathbb{E}(Y_2)\big)$.

(ב) $\mathbb{E}(Y_1 Y_2) = 0$.

(ג) $\mathbb{E}(Y_1 Y_2) = \mathbb{E}(Y_1)$.

.....

8. נתבונן בשונות המשותפת של Y_1 ו- Y_2 .

(א) $\mathrm{Cov}\left(Y_1, Y_2\right) < 0$.

(ב) $\mathrm{Cov}\left(Y_1, Y_2\right) = 1$.

(ג) $\mathrm{Cov}\left(Y_1, Y_2\right) = 0$.

.....

9.

(א) $\mathbb{P}\left(E_2 \,\middle|\, E_1\right) > \mathbb{P}\left(E_2\right)$.

(ב) המאורעות E_1, E_2 ב"ת.

(ג) המאורעות E_1, E_2 זרים.

סוגיה 3

יהי $(X_1,\ldots,X_{10})$ **מדגם סדור בגודל** 10 **מתוך** $\{-9,-8,\ldots,-1,0,1,\ldots,8,9\}$.
נתבונן במ"מ
$Y = X_1^2+\cdots+X_{10}^2$,
$Z = X_1\ldots X_{10}$,
ומאורעות
A : $Y=0$.
B : $Z=0$.
C : $Z>0$.
D : $Z=1$.
E_k : $\frac{Z}{k}$ **הוא מספר שלם.**

---

10. **ההסתברות** $\mathbb{P}\left(A\right)$ **שווה ל-**
(א) **אם המדגם עם החזרה אז** $\frac{1}{19^{10}}$,
ואם המדגם ללא החזרה אז $\frac{9!10!}{19!}$.
(ב) **אם המדגם עם החזרה אז** $\frac{9!10!}{19!}$,
ואם המדגם ללא החזרה אז 0 .
(ג) **אם המדגם עם החזרה אז** $\frac{1}{19^{10}}$,
ואם המדגם ללא החזרה אז 0 .

.....

11. **ההסתברות** $\mathbb{P}\left(B\right)$ **שווה ל-**
(א) **אם המדגם עם החזרה אז** $\frac{1}{2\cdot 9^{10}+1}$,
ואם המדגם ללא החזרה אז $\frac{1}{2(9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5)^2+1}$.
(ב) **אם המדגם עם החזרה אז** $1-\frac{18^{10}}{19^{10}}$,
ואם המדגם ללא החזרה אז $\frac{10}{19}$.
(ג) $\frac{10}{19}$.

.....

12. **אם המדגם עם החזרה אז ההסתברות** $\mathbb{P}\left(C\right)$ **שווה ל-**
(א) $\frac{9^{10}}{19^{10}}$.
(ב) $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{19^{10}}\right)$.
(ג) $\frac{1}{2}\left(1-\mathbb{P}\left(B\right)\right)$.

.....

13. ההסתברות $\mathbb{P}\left(D\right)$ שווה ל-

(א) $\mathbb{P}\left(B\right)$. (ב) $\frac{2^{10}}{2\cdot 19^{10}}$. (ג) 0 .

.....

14. ההסתברות $\mathbb{P}\left(E_2\right)$ שווה ל-

(א) X_1 זוגי $10\mathbb{P}\left(\right)$.

(ב) $\frac{1}{2}$

(ג) אם המדגם עם החזרה אז $1-\frac{10^{10}}{19^{10}}$,

ואם המדגם ללא החזרה אז $1-\frac{9!10!}{19!}$.

.....

15.

(א) $\mathbb{P}\left(E_5\right)=\mathbb{P}\left(E_7\right)<\mathbb{P}\left(E_9\right)$.

(ב) $\mathbb{P}\left(E_5\right)=\mathbb{P}\left(E_7\right)=\mathbb{P}\left(E_9\right)$.

(ג) $\mathbb{P}\left(E_5\right)>\mathbb{P}\left(E_7\right)>\mathbb{P}\left(E_9\right)$.

.....

16. אם המדגם עם החזרה אז

(א) $\mathbb{P}\left(C\cap E_2\,\middle|\,\overline{B}\right)=\mathbb{P}\left(C\,\middle|\,\overline{B}\right)\mathbb{P}\left(E_2\,\middle|\,\overline{B}\right)$.

(ב) $\mathbb{P}\left(C\cap E_2\right)>\mathbb{P}\left(C\right)\mathbb{P}\left(E_2\right)$.

(ג) $\mathbb{P}\left(C\cap E_2\right)=\mathbb{P}\left(C\right)\mathbb{P}\left(E_2\right)$.

.....

17. ההסתברות $\mathbb{P}\left(\overline{E_5\cup E_7}\right)$ לכך שאף אחד מ- E_5,E_7 לא יתרחש, היא שווה ל-

(א) אם המדגם עם החזרה אז $\frac{13^{10}}{19^{10}}$,

ואם המדגם ללא החזרה אז $\frac{9!13!}{3!19!}$.

(ב) אם המדגם עם החזרה אז $\frac{14^{10}}{19^{10}}$,

ואם המדגם ללא החזרה אז $\frac{9!14!}{4!19!}$.

(ג) $1-\mathbb{P}\left(E_5\right)-\mathbb{P}\left(E_7\right)+\mathbb{P}\left(E_5\right)\mathbb{P}\left(E_7\right)$.

.....

18. המאורעות E_5 ו- E_7 הם

(א) אם המדגם עם החזרה אז בלתי תלויים,

ואם המדגם ללא החזרה אז תלויים.

(ב) בלתי תלויים.

(ג) תלויים.

סוגיה 4

מטילים מטבע הוגן אד שנקבל 100 פעמים "ראש".
יהי X מספר הפעמים שמתקבל "זנב".

---

19. מצא חסם עליון להסתברות ש- $X \geq 1000$.
(א) $\mathbb{P}\left(X \geq 1000\right) = 0$, מפני ש- X מקבל ערכים $0, 1, \ldots, 100$ בלבד.
(ב) $\mathbb{P}\left(X \geq 1000\right) \leq \frac{1}{8100}$ לפי אי-שוויון Chebyshev.
(ג) $\mathbb{P}\left(X \geq 1000\right) \leq 0.1$ לפי אי-שוויון Markov.

. . . . . .

20. מצא קירוב נורמלי להסתברות ש- $X \geq 80$.
(א) $\mathbb{P}\left(X \geq 80\right) \approx 0.84$.
(ב) $\mathbb{P}\left(X \geq 80\right) \approx 0.98$.
(ג) $\mathbb{P}\left(X \geq 80\right) \approx 0.92$.

רשימת נוסחאות

ההתפלגות		$\mathbb{P}\left(X=k\right)$	$\mathbb{E}\left(X\right)$	$\mathbb{V}\left(X\right)$
בינומית	$B(n,p)$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
פואסון	$P(\lambda)$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	λ
גיאומטרית המתחילה ב-0	$G(p)$	$p(1-p)^k$	$\frac{1-p}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
אחידה ב-$\{1,\ldots,n\}$	$U(n)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
בינומית-שלילית המתחילה ב-0	$NB(n,p)$	$\binom{k+n-1}{n-1}p^n(1-p)^k$	$n\frac{1-p}{p}$	$n\frac{1-p}{p^2}$
היפרגיאומטרית	$H(n;R,W)$	$\frac{\binom{R}{k}\binom{W}{n-k}}{\binom{R+W}{n}}$	$n\frac{R}{R+W}$	$n\frac{RW}{(R+W)^2}\left(1-\frac{n-1}{R+W-1}\right)$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots\quad(-1<x<1)$$

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\ldots$$

$$\mathbb{E}\left(Y\right)=\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(Y\,\middle|\,X\right)\right)$$

$$\mathbb{V}\left(Y\right)=\mathbb{E}\left(\mathbb{V}\left(Y\,\middle|\,X\right)\right)+\mathbb{V}\left(\mathbb{E}\left(Y\,\middle|\,X\right)\right)$$

$$\hat{Y}=\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X-\mathbb{E}\left(X\right))+\mathbb{E}\left(Y\right)$$