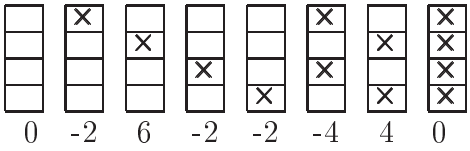
סמסטר א', מועד ב', תשס"ב
מספר התלמיד_____ תאריך הבחינה: 19.03.2002
מספר קורס: 0365-1102

בחינה במבוא להסתברות

המורים: פרופ' דוד גילת, פרופ' בוריס צירלסון

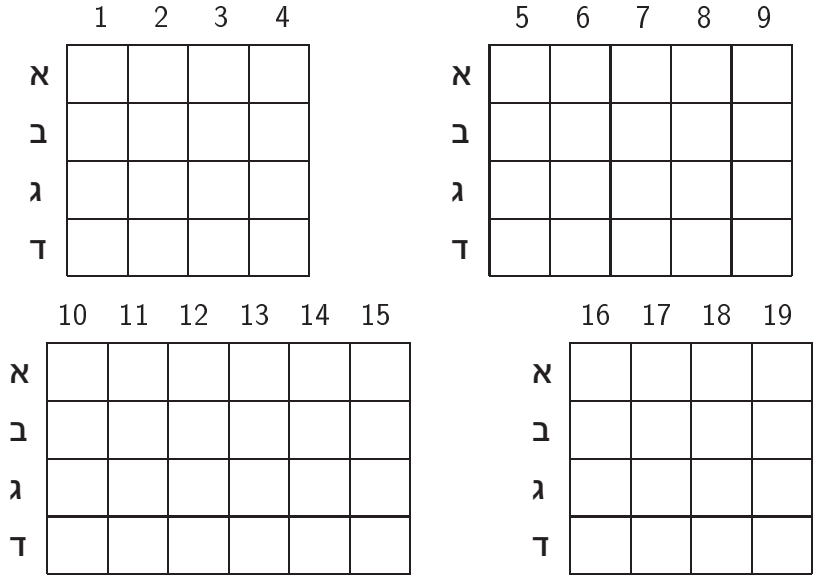
משך הבחינה: 3 שעות.
מותר להשתמש בדף סכום אישי, ובמחשב כיס.
השאלון מורכב מ-19 שאלות המבוססות על 4 סוגיות. רצוי לענות על כולן.
לכל שאלה ניתנות 4 תשובות שאחת ורק אחת מהן נכונה.
סימון התשובה הנכונה במקום המתאים בטבלה שבתחתית עמוד זה מזכה ב-6 נקודות זכות. סימון תשובה לא נכונה נושא שתי נקודות חובה.
הנבחן רשאי לסמן יותר מתשובה אחת באותה שאלה, אך רצוי להימנע מניחושים.

דוגמה:



סה"כ הנקודות האפשרי הוא 114.
לעזרתך מצורפת רשימת נוסחאות וטבלת ההתפלגות הנורמלית.

בהצלחה!



סוגיה 1

נתונים 3 מטבעות, אחד מהם מטבע הוגן הנופל על "ראש" או "זנב" בסיכויים שוים, והשניים האחרים מוטים לטובת "ראש" כך שהסיכוי לקבל "ראש" בהטלה בודדת של כל אחד מהם הוא $\frac{3}{5}$. בוחרים אחד משלשת המטבעות באופן מקרי ומטילים אותו פעמיים. יהי X_i ($i=1,2$) מספר ה"ראשים" בהטלה i (שימו לב: X_i הוא 0 או 1), ויהי $S=X_1+X_2$ מספר ה"ראשים" הכולל בשתי ההטלות.

---

1. המשתנים המקרים X_1, X_2 הם:
(א) בלתי מתואמים.
(ב) תלויים אך בלתי מתואמים.
(ג) בעלי מקדם מתאם חיובי.
(ד) בלתי תלויים.

. . . . . .

2. ההסתברות $\mathbb{P}\left(S=1\right)$ היא:
(א) $\frac{73}{150}$. (ב) $\frac{221}{900}$. (ג) $\frac{103}{200}$.
(ד) אף אחד מהנ"ל.

. . . . . .

3. בהינתן $S=1$, הסיכוי (המותנה) שהמטבע שנבחר לביצוע ההטלות הוא המטבע ההוגן, היא:
(א) $\frac{25}{73}$. (ב) $\frac{1}{3}$. (ג) $\frac{100}{147}$. (ד) $\frac{26}{79}$.

. . . . . .

4. בהינתן $S=1$, אם הטילו פעם נוספת את המטבע שנבחר, הסיכוי (המותנה) שבהטלה זו יתקבל "ראש" הוא:
(א) $\frac{289}{900}$. (ב) $\frac{17}{30}$. (ג) $\frac{153}{340}$. (ד) $\frac{413}{730}$.

סוגיה 2

נתונים n מטבעות. מטבע k הוא בעל סיכוי p_k לקבל "ראש" בהטלה בודדת, $0<p_k<1$ ($k=1,\ldots,n$). יהי S_n מספר ה"ראשים" המתקבל כאשר מטילים את n המטבעות באופן בלתי תלוי זה מזה. נתבונן במשתנה המקרי $(-1)^{S_n}$.

---

5. התוחלת $\mathbb{E}\left((-1)^{S_n}\right)$ מתאפסת אם ורק אם
(א) כל המטבעות הוגנים.
(ב) כל ה- p_k -ים שווים (לא בהכרח ל- $\frac{1}{2}$).
(ג) לפחות אחד מהמטבעות הוא הוגן, כלומר $p_k=\frac{1}{2}$ עבור k אחד לפחות.
(ד) התוחלת הזאת אף פעם אינה מתאפסת.

בשאלות 6 - 9 נניח שכל ה- p_k -ים שוים ונסמן את ערכם המשותף ב- p ; $0 < p < 1$.

6. התוחלת של $(-1)^{S_n}$ היא:

(א) $\frac{1-p}{n}$. (ב) $n(1-2p)$.

(ג) $(1-p)^n$. (ד) $(1-2p)^n$.

.....

7. הסיכוי ש- S_n הוא זוגי הוא:

(א) $\frac{1}{2}\left(1+(1-2p)^n\right)$. (ב) $\frac{1}{2}\left(1+(1-p)^n\right)$.

(ג) $1-(1-p)^n$. (ד) $\frac{1}{2}(1-p^n)$.

.....

8. יהי $\alpha_n = \mathbb{P}\left(S_n \text{זוגי}\right)$, אזי ההסתברות המותנה שהתקבל "ראש" במטבע הראשון, בהינתן שבסה"כ התקבל מספר זוגי של "ראשים", הוא:

(א) $\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}p$. (ב) $\frac{1-\alpha_{n-1}}{\alpha_n}p$.

(ג) $\frac{1-\alpha_{n-1}}{\alpha_n}$. (ד) $\frac{1-\alpha_n}{\alpha_{n-1}}$.

.....

9. התוצאה במטבע הראשון והזוגיות של S_n הם בלתי תלויים אם ורק אם:

(א) $p > \frac{1}{2}$. (ב) $p < \frac{1}{2}$. (ג) $p = \frac{1}{2}$.

(ד) אף פעם לא.

סוגיה 3

נערך סקר לקביעת השכיחות p של אנשים באוכלוסיה שהם בעלי תכונה מסוימת. מאחר שהתכונה רגישה, יש חשש שאנשים יתבישו לומר אמת. לפיכך כל נסקר מתבקש להטיל קוביה (ולשמור את תוצאת ההטלה לעצמו) ולענות לסוקר בהתאמה לטבלה הבאה:

תוצאת הקוביה	1	2	3	4	5	6
תשובה לשאלה "האם יש לך התכונה"	יש	אמת	אמת	אמת	אמת	אין

10. השכיחות של תשובה "יש" היא:

(א) $\frac{1}{6}+\frac{2}{3}p$. (ב) $\frac{1}{2}$. (ג) $\frac{3}{2}p-\frac{1}{4}$.

(ד) אף אחד מהנ"ל.

הערה: בשאלה זו הניחו שהמדגם מספיק גדול כך שאפשר לזהות שכיחות עם הסתברות.

מכאן ואילך בסוגיה זו, הניחו $p = \frac{1}{2}$.

11. משה ענה "יש". הסיכוי שהוא בעל התכונה הוא:

(א) $\frac{2}{3}$. (ב) $\frac{4}{5}$. (ג) $\frac{1}{2}$. (ד) $\frac{5}{6}$.

12. נניח שגודל המדגם הוא 10 . בהינתן שכל עשרת הנסקרים ענו "אין", מה הסיכוי (המותנה) שלמרות זאת כולם בעלי התכונה?

(א) $\frac{1}{10! \cdot 2^{10}}$. (ב) $\frac{1}{5^{10}}$. (ג) $\frac{1}{10 \cdot 2^{10}}$. (ד) $\frac{1}{6^{10}}$.

13. נניח שגודל המדגם הוא $3\,000$, ש- $1\,000$ מהם ענו "יש" ו- $2\,000$ ענו "אין". יהי X מספר בעלי התכונה במדגם. מה התוחלת (המותנה) של X ?

(א) $1\,200$. (ב) $\frac{3\,500}{3}$. (ג) $1\,000$. (ד) $\frac{4000}{3}$.

14. בהנחות של שאלה 13, מה השונות (המותנה) של X ?

(א) 750 . (ב) 0 . (ג) $\frac{1\,250}{3}$. (ד) $6\,000$.

15. בהנחות של שאלה 13, ההסתברות $\mathbb{P}\left(X \leq 1\,150\right)$ לפי הקירוב הנורמלי שייכת לקטע

(א) $(0, 0.16)$. (ב) $(0.15, 0.26)$.
(ג) $(0.25, 0.76)$. (ד) $(0.75, 1)$.

סוגיה 4

נתונה מקלדת בעלת k מקשים. קוף מבצע סדרה של הקשות בלתי תלויות ובעלות התפלגות אחידה על מקשי המקלדת. יהי $k = 11$ והמקשים הם $\boxed{0}$, $\boxed{1}$, . . . , $\boxed{9}$, $\boxed{\text{Enter}}$.

המחשב מפרש את הקלט כמספר X (בכתיב עשרוני). הקלט נפסק בהקשה ראשונה של $\boxed{\text{Enter}}$. לדוגמה:

קלט	$2002\boxed{\text{Enter}}$	$0020020\boxed{\text{Enter}}$	$0\boxed{\text{Enter}}$	$\boxed{\text{Enter}}$
X	2002	20020	0	0

16. מה הסיכוי ש- $X = 2002$?

(א) $\frac{1}{10 \cdot 11^4}$. (ב) $\frac{10}{9 \cdot 11^5}$. (ג) $\frac{1}{11^4}$. (ד) $\frac{1}{11^5}$.

בשלוש השאלות הבאות המקלדת מורכבת מ- 9 המקשים $\boxed{1}$, . . . , $\boxed{9}$, ועוד $(k-9)$ מקשים אחרים שכל אחד מהם פועל כמו $\boxed{\text{Enter}}$, כלומר מפסיק את הקלט. (שימו לב

שאין מקש $\boxed{0}$ אבל למרות זאת יתכן ש- $X = 0$.) יהי N מספר הספרות העשרוניות של X ונסכים ש- $N = 0$ כאשר $X = 0$.

. . . . . .

17. ההתפלגות של $N + 1$ היא:

(א). היפרגיאומטרית, $H(1; k - 9, 9)$.

(ב). בינומית, $B\left(k, \frac{k-9}{k}\right)$.

(ג). גיאומטרית, $G\left(\frac{k-9}{k}\right)$.

(ד). בינומית-שלילית, $NB\left(10, \frac{k-9}{k}\right)$.

---

18. התוחלת המותנה של X בהינתן $N = 5$ היא:

(א) $50\,000$. (ב) $49\,999.5$.

(ג) $55\,555$. (ד) $45\,000.5$.

. . . . . .

19. התוחלת של X היא סופית:

(א) אף פעם לא.

(ב) תמיד.

(ג) אם ורק אם $X = 0$.

(ד) אם ורק אם $k > 90$.

רשימת נוסחאות

ההתפלגות		$\mathbb{P}\left(X=k\right)$	$\mathbb{E}\left(X\right)$	$\mathbb{V}\left(X\right)$
בינומית	$B(n,p)$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
פואסון	$P(\lambda)$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	λ
גיאומטרית	$G(p)$	$p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
אחידה ב-$\{1,\ldots,n\}$	$U(n)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
בינומית-שלילית	$NB(n,p)$	$\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}$	$\frac{n}{p}$	$n\frac{1-p}{p^2}$
היפרגיאומטרית	$H(n;R,W)$	$\frac{\binom{R}{k}\binom{W}{n-k}}{\binom{R+W}{n}}$	$n\frac{R}{R+W}$	$n\frac{RW}{(R+W)^2}\left(1-\frac{n-1}{R+W-1}\right)$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots \quad (-1<x<1)$$

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\ldots$$

$$\mathbb{E}\left(Y\right)=\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(Y\,\middle|\,X\right)\right)$$

$$\mathbb{V}\left(Y\right)=\mathbb{E}\left(\mathbb{V}\left(Y\,\middle|\,X\right)\right)+\mathbb{V}\left(\mathbb{E}\left(Y\,\middle|\,X\right)\right)$$

$$\hat{Y}=\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X-\mathbb{E}\left(X\right))+\mathbb{E}\left(Y\right)$$