מספר מחברת_____

מספר ת.ז._____

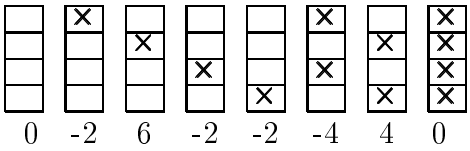
סמסטר א', מועד ב', תשס"ט
תאריך הבחינה: 20.03.2009
מספר קורס: 0365-1102

בחינה במבוא להסתברות

המורים: פרופ' יצחק מלכסון, פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.
מותר להשתמש בדף סכום אישי, ובמחשב כיס.
השאלון מורכב מ-19 שאלות המבוססות על 4 סוגיות. רצוי לענות על כולן.
לכל שאלה ניתנות 3 תשובות. סמן בטבלת התשובות את התשובה הנראית לך נכונה.
באם כל התשובות נראות לך לא נכונות סמן (ד).
סימון התשובה הנכונה במקום המתאים בטבלה שבתחתית עמוד זה מזכה ב-6 נקודות זכות. סימון תשובה לא נכונה נושא שתי נקודות חובה.
הנבחן רשאי לסמן יותר מתשובה אחת באותה שאלה.

דוגמה:



סה"כ הנקודות האפשרי הוא 114.
לעזרתך מצורפת רשימת נוסחאות.

בהצלחה!

	1	2	3	4	5
א					
ב					
ג					
ד					

	6	7	8	9	10	11
א						
ב						
ג						
ד						

	12	13	14	15	16	17
א						
ב						
ג						
ד						

	18	19
א		
ב		
ג		
ד		

סוגיה 1

מפזרים 20 כדורים (עם שמות מ-1 עד 20) בשלושה כדים, כך שכל 3^{20} תוצאות הפיזור שוות סיכוי. נסמן ב- X_i את מספר הכדורים בעלי שם זוגי בכד ה- i ($i = 1, 2, 3$), וב- Y_i את מספר הכדורים בעלי שם אי-זוגי בכד ה- i .

1.
(א) X_1 ו- X_2 תלויים, אך X_1 ו- Y_1 בלתי תלויים.
(ב) X_1 ו- X_2 בלתי תלויים, אך X_1 ו- Y_1 תלויים.
(ג) X_1 ו- X_2 תלויים, וגם X_1 ו- Y_1 תלויים.

.....

2.
(א) מ"מ $X_1 + X_2$ בעל התפלגות לא בינומית וגם מ"מ $X_1 + Y_1$ בעל התפלגות לא בינומית.
(ב) מ"מ $X_1 + X_2$ בעל התפלגות בינומית, וגם מ"מ $X_1 + Y_1$ בעל התפלגות בינומית.
(ג) מ"מ $X_1 + X_2$ בעל התפלגות בינומית, אך מ"מ $X_1 + Y_1$ בעל התפלגות לא בינומית.

.....

3. ההתפלגות המותנית של X_1 בהנתן $X_1 + Y_1 = 9$ היא
(א) אחידה (ב) היפרגיאומטרית (ג) בינומית

.....

4. ההתפלגות המותנית של X_1 בהנתן $X_1 + X_2 = 9$ היא
(א) אחידה (ב) בינומית (ג) היפרגיאומטרית

.....

5. ההתפלגות המותנית של X_1 בהנתן $Y_2 = 5$ היא
(א) בינומית (ב) היפרגיאומטרית (ג) אחידה

סוגיה 2

בהגרלת הלוטו המספר הזוכה נבחר באקראי (על פי התפלגות אחידה) כמספר שלם בין 1 ל- N . כל משתתף זכאי להמר על מספר יחיד, והפרס בסך M שקלים מחולק שווה בשווה בין כל הזוכים.

---

6. רחל בוחרת את ההימור שלה על פי התפלגות אחידה על הקבוצה $\{1, 2, \ldots, N\}$. ההסתברות שרחל תנחש נכונה את המספר הזוכה היא:
(א) $\frac{1}{N}$ (ב) $\frac{1}{N^2}$ (ג) $\frac{2}{N+1}$

.....

7. בני בוחר גם הוא את ההימור על פי התפלגות אחידה על הקבוצה $\{1, 2, \ldots, N\}$, ובאופן בלתי תלוי בבחירת רחל. ההסתברות שלפחות אחד מבין רחל ובני ינחש נכונה את המספר הזוכה היא:

(א) $\left(1-\frac{1}{N}\right)^2$ (ב) $\frac{2}{N}$ (ג) $\frac{2}{N}-\frac{1}{N^2}$

.....

8. נניח כי רחל ובני הם המשתתפים היחידים בהגרלה, וכל אחד מהם בוחר מספר בין 1 ל- N על פי התפלגות אחידה באופן בלתי תלוי בשני. תוחלת הרווח של רחל היא:

(א) $\frac{M}{N}\left(1-\frac{1}{2N}\right)$ (ב) $\frac{M}{N}\left(1-\frac{1}{N}\right)$ (ג) $M-\frac{M}{2N}$

.....

9. נניח כי רחל ובני מסכימים ביניהם כי רחל תבחר במספר 1 , בני יבחר במספר 2 , והם יתחלקו ברווחים שווה בשווה. בהנחה שרחל ובני הם המשתתפים היחידים בהגרלה, תוחלת הרווח של רחל היא:

(א) אין מספיק נתונים כדי לענות על השאלה.

(ב) גדולה יותר מאשר בשאלה 8 .

(ג) קטנה יותר מאשר בשאלה 8 .

.....

10. n אנשים, ביניהם רחל, משתתפים בהגרלה, וכל אחד מהם בוחר באופן בלתי תלוי את ההימור שלו על פי התפלגות אחידה על הקבוצה $\{1,2,\ldots,N\}$. יהי X מספר הזוכים, ויהי A המאורע שרחל זוכה. ההתפלגות המותנית של X בהינתן A היא:

(א) $X|_A \sim B\left(n,\frac{1}{N}\right)$.

(ב) $X|_A \sim B\left(n-1,\frac{1}{N}\right)$.

(ג) $X-1|_A \sim B\left(n-1,\frac{1}{N-1}\right)$.

.....

11. בהנחות של שאלה 10, תוחלת הרווח של רחל (ללא התניה במאורע A) היא:

(א) $\frac{M}{n}\left(1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right)$ (ב) $\frac{M}{N}\left(1-\frac{n-1}{2N}\right)$ (ג) $\frac{M}{nN}$

סוגיה 3

מטילים קוביה הוגנת 9 פעמים, מקבלים משתנים מקריים ב"ת ש"ה $X_1,X_2,\ldots,X_9$, בעלי התפלגות אחידה ב- $\{1,2,\ldots,6\}$. נגדיר הצלחה בניסוי ה- k ($k=2,\ldots,9$) ע"י אי-שוויון

$$X_k < 2X_1 - 3$$

יהי N מספר ההצלחות בין 8 הניסויים.

---

12. מצא את ההתפלגות המותנית של N בהנתן $X_1=3$.

(א) $B(8,\frac{1}{3})$ (ב) $U(0,8)$ (ג) $H(3;2,4)$

.....

13. מצא את התוחלת $\mathbb{E}(N)$.

(א) $\frac{8}{3}$ (ב) $\frac{8}{3}(X_1-2)$ (ג) 4

.....

14. כמה ערכים שונים מקבל המ"מ $\mathrm{Var}\left(N \,\middle|\, X_1\right)$ (שונות מותנית)?

(א) 6 (ב) 3 (ג) 4

.....

15. מצא את יחס ההסתברויות המותנות $\frac{\mathbb{P}\left(X_1=3 \,\middle|\, N=3\right)}{\mathbb{P}\left(X_1=4 \,\middle|\, N=3\right)}$.

רמז: נוסחת בייז.

(א) $\frac{17}{6}$ (ב) 1 (ג) 4

.....

16. מצא את ההסתברות המותנית $\mathbb{P}\left(X_1=3 \,\middle|\, N=3\right)$.

(א) $\frac{1}{2}$ (ב) $\frac{17}{27}$ (ג) $\frac{4}{5}$

.....

17. מטילים את הקוביה פעם עשירית. מצא את ההסתברות המותנית להצלחה, $\mathbb{P}\left(X_{10}<2X_1-3 \,\middle|\, N=3\right)$.

(א) $\frac{1}{2}$ (ב) $\frac{1}{3}$ (ג) $\frac{2}{5}$

סוגיה 4

מטילים מטבע הוגן עד שמתקבל 100 פעמים "עץ".
יהי X מספר הפעמים שמתקבל "פלי".

---

18. מצא חסם עליון להסתברות ש- $X \geq 1000$.

(א) $\mathbb{P}\left(X \geq 1000\right) \leq \frac{1}{8100}$ לפי אי-שוויון Chebyshev.

(ב) $\mathbb{P}\left(X \geq 1000\right)=0$, מפני ש- X מקבל ערכים $0,1,\ldots,100$ בלבד.

(ג) $\mathbb{P}\left(X \geq 1000\right) \leq 0.1$ לפי אי-שוויון Markov.

.....

19. מצא קירוב נורמלי להסתברות ש- $X \geq 80$.

(א) $\mathbb{P}\left(X \geq 80\right) \approx 0.84$.

(ב) $\mathbb{P}\left(X \geq 80\right) \approx 0.98$.

(ג) $\mathbb{P}\left(X \geq 80\right) \approx 0.92$.

רשימת נוסחאות

ההתפלגות		$\mathbb{P}\left(X=k\right)$	$\mathbb{E}\left(X\right)$	$\mathrm{Var}\left(X\right)$
בינומית	$B(n,p)$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
פואסון	$P(\lambda)$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	λ
גיאומטרית	$G(p)$	$p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
אחידה ב-$\{1,\ldots,n\}$	$U(n)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
בינומית-שלילית	$NB(n,p)$	$\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}$	$\frac{n}{p}$	$n\frac{1-p}{p^2}$
היפרגיאומטרית	$H(n;R,W)$	$\frac{\binom{R}{k}\binom{W}{n-k}}{\binom{R+W}{n}}$	$n\frac{R}{R+W}$	$n\frac{RW}{(R+W)^2}\left(1-\frac{n-1}{R+W-1}\right)$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots \quad (-1<x<1)$$

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\ldots$$

$$\mathbb{E}\left(Y\right)=\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(Y\,\middle|\,X\right)\right)$$

$$\mathrm{Var}\left(Y\right)=\mathbb{E}\left(\mathrm{Var}\left(Y\,\middle|\,X\right)\right)+\mathrm{Var}\left(\mathbb{E}\left(Y\,\middle|\,X\right)\right)$$

$$\hat{Y}=\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X-\mathbb{E}\left(X\right))+\mathbb{E}\left(Y\right)$$

λ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$e^{-\lambda}$	0.905	0.819	0.741	0.670	0.607	0.549	0.497	0.449	0.407

λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$e^{-\lambda}$	0.368	0.135	0.0498	0.0183	0.0067	0.0025	0.0009	0.0003	0.0001