מספר מחברת_____

מספר ת.ז._____

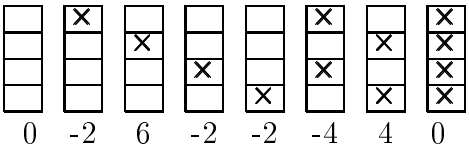
סמסטר א', מועד א', תשס"ט
תאריך הבחינה: 17.02.2009
מספר קורס: 0365-1102

בחינה במבוא להסתברות

המורים: פרופ' יצחק מלכסון, פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.
מותר להשתמש בדף סכום אישי, ובמחשב כיס.
השאלון מורכב מ-20 שאלות המבוססות על 4 סוגיות. רצוי לענות על כולן.
לכל שאלה ניתנות 3 תשובות. סמן בטבלת התשובות את התשובה הנראית לך נכונה.
באם כל התשובות נראות לך לא נכונות סמן (ד).
סימון התשובה הנכונה במקום המתאים בטבלה שבתחתית עמוד זה מזכה ב-6 נקודות זכות. סימון תשובה לא נכונה נושא שתי נקודות חובה.
הנבחן רשאי לסמן יותר מתשובה אחת באותה שאלה.

דוגמה:



סה"כ הנקודות האפשרי הוא 120.
לעזרתך מצורפת רשימת נוסחאות.

בהצלחה!

	1	2	3	4	5	6	7
א							
ב							
ג							
ד							

	8	9	10
א			
ב			
ג			
ד			

	11	12	13	14	15	16
א						
ב						
ג						
ד						

	17	18	19	20
א				
ב				
ג				
ד				

סוגיה 1

יהי X מתפלג פואסון עם פרמטר λ .

1. עבור $\lambda = 1$ חשב $\mathbb{E}\left(X \,\middle|\, X \geq 1 \right)$.

(א) $\dfrac{e}{e-1}$ (ב) $\dfrac{1}{e-2}$ (ג) 2

2. עבור $\lambda = 1$ חשב $\mathrm{Var}\left(X \,\middle|\, X \geq 1 \right)$.

(א) $\dfrac{e-2}{e-1}$ (ב) $\dfrac{e}{e-1}$ (ג) $\dfrac{e(e-2)}{(e-1)^2}$

3. עבור $\lambda = \dfrac{1}{2}$ חשב $\mathbb{E}(\, X!\,)$.

(א) $\dfrac{\sqrt{e}}{4}$ (ב) $\dfrac{2}{e}$ (ג) $\dfrac{1}{2}$

4. עבור $\lambda = 2$ חשב $\mathbb{E}(\, 2^X\,)$.

(א) e^2 (ב) e (ג) 4

5. עבור $\lambda = 1$ חשב $\mathrm{Cov}\left(2^X, 3^X \right)$.

(א) $e^5 - e^3$ (ב) e^5 (ג) $e^3 - e^5$

6. עבור $\lambda = 1$ חשב את מקדם המתאם בין 2^X לבין 3^X .

(א) $\sqrt{\dfrac{e^2-1}{e^2+1}}$ (ב) $\sqrt{\dfrac{e+1}{e^2+1}}$ (ג) 1

7. עבור $\lambda = 10\,000$ חשב בקירוב $p = \mathbb{P}\left(X \geq 10\,150 \right)$.

(א) $0.06 < p < 0.08$ (ב) $0.04 < p < 0.06$ (ג) $0.03 < p < 0.04$

סוגיה 2

יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_{20}$ משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות המתפלגים אחיד בקבוצה $\{1,2,3,4\}$. נגדיר מאורעות

A : $X_1 \leq X_2 \leq \cdots \leq X_{20}$;

B : כל אחד מהמספרים $1,2,3,4$ מופיע בסידרה $X_1, X_2, \ldots, X_{20}$ (לפחות פעם).

8. חשב $\mathbb{P}\left(A \right)$.

(א) $2^{-40}\binom{23}{3}$ (ב) $2^{-57}5^{19}$ (ג) $2^{-40}\binom{19}{3}$

9. חשב $\mathbb{P}\left(A \,\middle|\, X_8 = X_{10} = 2\right)$.

(א) $2^{-36}\binom{23}{3}$ (ב) $2^{-32} \cdot 33$ (ג) $2^{-53} \cdot 5^{19}$

.....

10. חשב $\mathbb{P}\left(A \cap B\right)$.

(א) 2^{-27} (ב) $2^{-52} \cdot 3^{-1} \cdot 5^{19}$ (ג) $2^{-40}\binom{19}{3}$

סוגיה 3

11. יהיו X, Y משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות עם $\mathbb{E}(X) = 3$ ו- $\mathrm{Var}(X) = 4$. חשב $\mathbb{E}((X-Y)^2)$.

(א) אין מספיק נתונים כדי לענות על השאלה. (ב) 26 (ג) 4

.....

12. יהיו X, Y משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות המתפלגים אחיד בקבוצה $\{1, 2, \ldots, 8\}$. חשב $\mathbb{E}((X-Y)^2)$.

(א) 10.5 (ב) 5.25 (ג) $\frac{32}{3}$

.....

13. בנתוני שאלה 12, חשב $\mathbb{E}\left((X-Y)^2 \,\middle|\, X \neq Y\right)$.

(א) 12 (ב) 10.5 (ג) 11

.....

14. תהי $(X_1, X_2, \ldots, X_8)$ תמורה מקרית של $(1, 2, \ldots, 8)$, ויהי $S = (X_1 - X_2)^2 + (X_2 - X_3)^2 + \cdots + (X_7 - X_8)^2$. חשב $\mathbb{E}(S)$.

(א) 73.5 (ב) אין מספיק נתונים כדי לענות על השאלה. (ג) 84

.....

15. בנתוני שאלה 14, חשב $\mathbb{E}\left(S \,\middle|\, X_8 = 8\right)$.

(א) 73.5 (ב) 76 (ג) 48

.....

16. יהיו $(X_1, X_2, \ldots, X_8)$ ו- $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_8)$ שתי תמורות מקריות בלתי תלויות של $(1, 2, \ldots, 8)$, ויהי $R = (X_1 - Y_1)^2 + (X_2 - Y_2)^2 + \cdots + (X_8 - Y_8)^2$. חשב $\mathbb{E}(R)$.

(א) 84 (ב) 48 (ג) 73.5

סוגיה 4

17. יהי X מתפלג גיאומטרית עם פרמטר $p = \frac{1}{2}$. נגדיר מאורעות

A : X הוא מספר זוגי;

B : X הוא מספר אי-זוגי.

ההתפלגות המותנית של $X/2$ בהנתן A היא

(א) גיאומטרית (ב) היפרגיאומטרית (ג) בינומית שלילית

---

18. בנתוני שאלה 17, חשב $\mathbb{E}\left(X \,\middle|\, A\right) - \mathbb{E}\left(X \,\middle|\, B\right)$.

(א) $\frac{1}{2}$ (ב) 0 (ג) 1

---

19. יהי X מתפלג בינומית שלילית עם פרמטרים $n = 9\,000$ ו- $p = \frac{1}{10}$. חשב בקירוב $a = \mathbb{P}\left(X \leq 88\,200\right)$.

(א) $0.03 < a < 0.04$ (ב) $0.04 < a < 0.06$ (ג) $0.06 < a < 0.08$

---

20. יהיו X, Y משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות, המתפלגים בינומית עם פרמטרים $n = 24$ ו- $p = \frac{1}{4}$. תן חסם מלעיל קטן כפי שתוכל להסתברות $a = \mathbb{P}\left(X \geq Y + 9\right)$.

(א) $a \leq \frac{1}{18}$. (ב) $a \leq \frac{2}{5}$. (ג) $a \leq \frac{1}{9}$.

רשימת נוסחאות

ההתפלגות		$\mathbb{P}\left(X=k\right)$	$\mathbb{E}\left(X\right)$	$\mathrm{Var}\left(X\right)$
בינומית	$B(n,p)$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
פואסון	$P(\lambda)$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	λ
גיאומטרית	$G(p)$	$p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
אחידה ב-$\{1,\ldots,n\}$	$U(n)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
בינומית-שלילית	$NB(n,p)$	$\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}$	$\frac{n}{p}$	$n\frac{1-p}{p^2}$
היפרגיאומטרית	$H(n;R,W)$	$\frac{\binom{R}{k}\binom{W}{n-k}}{\binom{R+W}{n}}$	$n\frac{R}{R+W}$	$n\frac{RW}{(R+W)^2}\left(1-\frac{n-1}{R+W-1}\right)$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots \quad (-1<x<1)$$

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\ldots$$

$$\mathbb{E}\left(Y\right)=\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(Y\,\middle|\,X\right)\right)$$

$$\mathrm{Var}\left(Y\right)=\mathbb{E}\left(\mathrm{Var}\left(Y\,\middle|\,X\right)\right)+\mathrm{Var}\left(\mathbb{E}\left(Y\,\middle|\,X\right)\right)$$

$$\hat{Y}=\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X-\mathbb{E}\left(X\right))+\mathbb{E}\left(Y\right)$$

λ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$e^{-\lambda}$	0.905	0.819	0.741	0.670	0.607	0.549	0.497	0.449	0.407

λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$e^{-\lambda}$	0.368	0.135	0.0498	0.0183	0.0067	0.0025	0.0009	0.0003	0.0001