מספר מחברת_____

מספר ת.ז._____

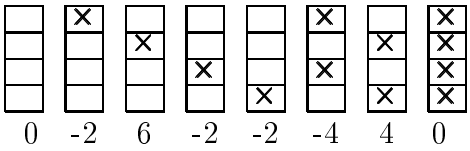
סמסטר א', מועד ב', תשס"ח
תאריך הבחינה: 30.05.2008
מספר קורס: 0365-1102

בחינה במבוא להסתברות

המורים: פרופ' אהוד לרר, פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.
מותר להשתמש בדף סכום אישי, ובמחשב כיס.
השאלון מורכב מ-20 שאלות המבוססות על 3 סוגיות. רצוי לענות על כולן.
לכל שאלה ניתנות 3 תשובות. סמן בטבלת התשובות את התשובה הנראית לך נכונה.
באם כל התשובות נראות לך לא נכונות סמן (ד).
סימון התשובה הנכונה במקום המתאים בטבלה שבתחתית עמוד זה מזכה ב-6 נקודות זכות. סימון תשובה לא נכונה נושא שתי נקודות חובה.
הנבחן רשאי לסמן יותר מתשובה אחת באותה שאלה.

דוגמה:



סה"כ הנקודות האפשרי הוא 120.
לעזרתך מצורפת רשימת נוסחאות.

בהצלחה!

	1	2	3	4
א				
ב				
ג				
ד				

	5	6	7	8
א				
ב				
ג				
ד				

	9	10	11
א			
ב			
ג			
ד			

	12	13	14	15
א				
ב				
ג				
ד				

	16	17	18	19	20
א					
ב					
ג					
ד					

סוגיה 1

יהיו $X_1, X_2, \ldots$ מ"מ ב"ת ש"ה, $\mathbb{P}\left(X_1 = 0\right) = \frac{2}{3}$, $\mathbb{P}\left(X_1 = 1\right) = \frac{1}{3}$. נגדיר את המאורעות הבאים:

$$\begin{aligned} A_2 &= \{X_1 = X_2\}, \\ A_3 &= \{X_1 = X_2 = X_3\}, \\ &\ldots \\ A_n &= \{X_1 = X_2 = \cdots = X_n\}. \end{aligned}$$

---

1. ההסתברות המותנה $\mathbb{P}\left(A_2 \,\middle|\, X_1 = 1\right)$ היא
(א) $\frac{1}{5}$ (ב) $\frac{5}{9}$ (ג) $\frac{1}{3}$

2. ההסתברות המותנה $\mathbb{P}\left(X_1 = 1 \,\middle|\, A_2\right)$ היא
(א) $\frac{5}{9}$ (ב) $\frac{1}{3}$ (ג) $\frac{1}{5}$

3. ההסתברות המותנה $\mathbb{P}\left(A_3 \,\middle|\, A_2\right)$ היא
(א) $\frac{3}{5}$ (ב) $\frac{5}{9}$ (ג) $\frac{2}{3}$

4. הגבול $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(A_{n+1} \,\middle|\, A_n\right)$ הוא
(א) $\frac{5}{9}$ (ב) $\frac{2}{3}$ (ג) $\frac{3}{5}$

סוגיה 2

יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ מ"מ ב"ת ש"ה, $\mathbb{E}\left(X_1^2\right) < \infty$. נגדיר את המאורע

$$A = \{X_1 = X_2\}.$$

---

5. הטענה $\mathbb{E}\left(X_1 + X_2 \,\middle|\, A\right) = \mathbb{E}\left(X_1 + X_2\right)$
(א) נכונה תמיד.
(ב) נכונה אם X_1 בעל התפלגות אחידה, אך (ג) לא נכון.
(ג) נכונה אם X_1 בעל התפלגות גיאומטרית, אך (ב) לא נכון.

6. הטענה $\mathbb{E}\left(X_1 + \cdots + X_{10} \,\middle|\, A\right) = \mathbb{E}\left(X_1 + \cdots + X_{10}\right)$
(א) נכונה תמיד.

(ב) נכונה אם X_1 בעל התפלגות אחידה, אך (ג) לא נכון.
(ג) נכונה אם X_1 בעל התפלגות גיאומטרית, אך (ב) לא נכון.

. . . . . .

7. הטענה $\mathrm{Var}\left(X_1+X_2 \,\middle|\, A\right) = \mathrm{Var}\left(X_1+X_2\right)$
(א) נכונה אם X_1 בעל התפלגות גיאומטרית, אך (ב) לא נכון.
(ב) נכונה אם X_1 בעל התפלגות אחידה, אך (א) לא נכון.
(ג) נכונה תמיד.

. . . . . .

8. הטענה $\mathrm{Var}\left(X_1+\cdots+X_{10} \,\middle|\, A\right) = \mathrm{Var}\left(X_1+\cdots+X_{10}\right)$
(א) נכונה אם X_1 בעל התפלגות גיאומטרית, אך (ג) לא נכון.
(ב) נכונה תמיד.
(ג) נכונה אם X_1 בעל התפלגות אחידה, אך (א) לא נכון.

סוגיה 3

יהיו X,Y מ"מ ב"ת. נגדיר את המאורע

$$A=\{X=Y\}.$$

---

9. אם $X\sim B(20,0.7)$ ו- $Y\sim B(30,0.3)$, אז ההתפלגות המותנה של X בהנתן A היא
(א) היפרגאומטרית (ב) בינומית (ג) אחידה

. . . . . .

10. אם $X\sim G(0.7)$ ו- $Y\sim G(0.3)$, אז ההתפלגות המותנה של X בהנתן A היא
(א) בינומית שלילית.
(ב) אין מספיק נתונים כדי לדעת.
(ג) גיאומטרית.

. . . . . .

11. מהי ההתפלגות של Y, אם $X\sim G(0.7)$ וההתפלגות המותנה של X בהנתן A היא $G(0.3)$?
(א) בינומית שלילית.
(ב) גיאומטרית.
(ג) לא קיימים X,Y כאלה.

סוגיה 4

יהיו X, Y מ"מ ב"ת עם תוחלת ושונות סופיות. נסמן

$$Z = X + Y\,, \quad W = X - Y\,.$$

12.
(א) Z ו- W הם בלתי מתואמים אם ורק אם $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$.
(ב) Z ו- W הם בלתי מתואמים אם ורק אם $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y)$.
(ג) Z ו- W הם תמיד בלתי מתואמים.

. . . . . .

13. $X \sim B(6, \frac{1}{2})$, Y משתנה אחיד על פני $1, 2, \ldots, 6$ (קוביה). נסמן ב- r את מקדם המתאם בין Z ו- W .
(א) $r > \frac{1}{2}$ (ב) $r < -\frac{1}{2}$ (ג) $r = 0$

. . . . . .

14. X ו- Y מקבלים ערכים 0 או 1 בהסתברות $\frac{1}{2}$.
(א) Z ו- W בעלי מתאם חיובי.
(ב) Z ו- W בעלי מתאם שלילי.
(ג) Z ו- W בלתי תלויים.

. . . . . .

15. השונות של ZW :
(א) עשויה להיות שווה ל- 0 אבל תמיד סופית.
(ב) תמיד חיובית ממש.
(ג) עשויה להיות אינסופית.

סוגיה 5

מטילים 100 מטבעות הוגנים שעליהם רשומים 0 ו- 1. מקבלים 100 מ"מ: $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$, כאשר X_i היא תוצאת ההטלה של המטבע ה- i (0 או 1). לאחר מכן מסדרים את המטבעות בסדר אקראי מבלי להפוך את הצדדים. מקבלים 100 מ"מ חדשים: $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{100}$. נגדיר בנוסף את המ"מ

$$X = \sum_{i=1}^{100} X_i\,, \quad Z = \sum_{i=1}^{100} X_i Y_i\,.$$

---

16. ההתפלגות של X היא
(א) אחידה (ב) בינומית (ג) היפרגאומטרית

.....

17. ההתפלגות המותנה של Z בהנתן $X = 60$ היא
(א) בינומית (ב) אחידה (ג) היפרגאומטרית

.....

18. ההתפלגות המותנה של X בהנתן $X - Z = 0$ היא
(א) אחידה (ב) בינומית (ג) היפרגאומטרית

.....

19. ההתפלגות המותנה של X בהנתן $X - Z = 1$ היא
(א) בינומית (ב) היפרגאומטרית (ג) אחידה

.....

20. התוחלת המותנה של X בהנתן $X - Z = 10$ שווה ל-
(א) 50 (ב) 60 (ג) 40

רשימת נוסחאות

ההתפלגות		$\mathbb{P}\left(X=k\right)$	$\mathbb{E}\left(X\right)$	$\mathrm{Var}\left(X\right)$
בינומית	$B(n,p)$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
פואסון	$P(\lambda)$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	λ
גיאומטרית	$G(p)$	$p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
אחידה ב-$\{1,\ldots,n\}$	$U(n)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
בינומית-שלילית	$NB(n,p)$	$\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}$	$\frac{n}{p}$	$n\frac{1-p}{p^2}$
היפרגיאומטרית	$H(n;R,W)$	$\frac{\binom{R}{k}\binom{W}{n-k}}{\binom{R+W}{n}}$	$n\frac{R}{R+W}$	$n\frac{RW}{(R+W)^2}\left(1-\frac{n-1}{R+W-1}\right)$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots\quad(-1<x<1)$$

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\ldots$$

$$\mathbb{E}\left(Y\right)=\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(Y\,\middle|\,X\right)\right)$$

$$\mathrm{Var}\left(Y\right)=\mathbb{E}\left(\mathrm{Var}\left(Y\,\middle|\,X\right)\right)+\mathrm{Var}\left(\mathbb{E}\left(Y\,\middle|\,X\right)\right)$$

$$\hat{Y}=\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X-\mathbb{E}\left(X\right))+\mathbb{E}\left(Y\right)$$

λ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$e^{-\lambda}$	0.905	0.819	0.741	0.670	0.607	0.549	0.497	0.449	0.407

λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$e^{-\lambda}$	0.368	0.135	0.0498	0.0183	0.0067	0.0025	0.0009	0.0003	0.0001