מספר מחברת_____

מספר ת.ז._____

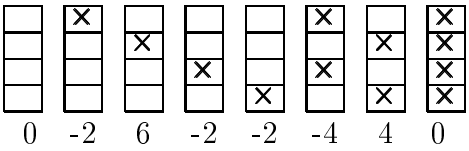
סמסטר א', מועד א', תשס"ח
תאריך הבחינה: 15.04.2008
מספר קורס: 0365-1102

בחינה במבוא להסתברות

המורים: פרופ' אהוד לרר, פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.
מותר להשתמש בדף סכום אישי, ובמחשב כיס.
השאלון מורכב מ-19 שאלות המבוססות על 3 סוגיות. רצוי לענות על כולן.
לכל שאלה ניתנות 3 תשובות. סמן בטבלת התשובות את התשובה הנראית לך נכונה.
באם כל התשובות נראות לך לא נכונות סמן (ד).
סימון התשובה הנכונה במקום המתאים בטבלה שבתחתית עמוד זה מזכה ב-6 נקודות זכות. סימון תשובה לא נכונה נושא שתי נקודות חובה.
הנבחן רשאי לסמן יותר מתשובה אחת באותה שאלה.

דוגמה:



סה"כ הנקודות האפשרי הוא 114.
לעזרתך מצורפת רשימת נוסחאות.

בהצלחה!

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
א										
ב										
ג										
ד										

	11	12	13	14	15
א					
ב					
ג					
ד					

	16	17	18	19
א				
ב				
ג				
ד				

סוגיה 1

מטילים n פעמים מטבע הוגן שעל צדדיו רשומים המספרים 1 ו- 0, מקבלים n מ"מ: $X_1, X_2, \ldots, X_n$, כאשר X_i תוצאת ההטלה ה- i -ית (0 או 1). לאחר מכן מסדרים את המטבעות בסדר אקראי מבלי להפוך את הצדדים. מקבלים n מ"מ חדשים: $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$. נגדיר בנוסף את המ"מ

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i\,, \quad Z_i = \mathbf{1}_{\{X_i = Y_i\}} \ \ (i = 1, \ldots, n)\,, \quad Z = \sum_{i=1}^{n} Z_i\,.$$

---

1. ההסתברות $\mathbb{P}\left(Y_1 = 1\right)$ שווה ל-

(א) $\frac{1}{2n}$ (ב) $\frac{1}{2}$ (ג) $\frac{n+1}{2n}$

2. ההסתברות המותנה $\mathbb{P}\left(Y_1 = 1 \,\middle|\, X_1 = 1\right)$ שווה ל-

(א) $\frac{n+1}{2n}$ (ב) $\frac{n}{2n-1}$ (ג) אין מספיק נתונים כדי לדעת.

3. ההסתברות $\mathbb{P}\left(Z_1 = 1\right)$ שווה ל-

(א) $\frac{n-1}{2n}$ (ב) $\frac{n}{2n-1}$ (ג) $\frac{1}{2}$

4. התוחלת $\mathbb{E}\left(Z\right)$ שווה ל-

(א) $\frac{n^2}{2n-1}$ (ב) $\frac{n+1}{2}$ (ג) $\frac{n}{2}$

5. ההסתברות המותנה $\mathbb{P}\left(Z = n \,\middle|\, X = k\right)$ שווה ל-

(א) $\frac{1}{n!}$ (ב) $\frac{1}{\binom{n}{k}}$ (ג) $\frac{k!}{n!}$

6. ההסתברות $\mathbb{P}\left(Z = n\right)$ שווה ל-

(א) $\frac{1}{n!}$. (ב) $\frac{1}{n}$ (ג) $\frac{n+1}{2^n}$

7. עבור $n = 15$ ההסתברות $\mathbb{P}\left(Z = 0\right)$ שווה ל-

(א) $\frac{1}{2^{15}}$ (ב) $\frac{1}{15!}$ (ג) 0

8. כאשר n שואף לאינסוף, סידרת ההסתברויות $\mathbb{P}\left(Z = 0\right)$ מתכנסת ל-

(א) 1 (ב) 0 (ג) לסידרה הנ"ל אין גבול.

9. התוחלת המותנה $\mathbb{E}\left(Z \middle| X\right)$ שווה ל-

(א) $n\frac{(n-X)!X!}{n!}$ (ב) $\frac{n+1}{2}$ (ג) $\frac{(n-X)^2+X^2}{n}$

.....

10. המשתנים המקריים X, Z הם

(א) בלתי תלויים.

(ב) בעלי מתאם חיובי.

(ג) בלתי מתואמים אך תלויים.

סוגיה 2

כד מכיל 10 כדורים ממוספרים. בוחרים כדור באקראי, רושמים את מספרו X. בסיכוי $\frac{1}{2}$ מחזירים את הכדור לכד (ובסיכוי $\frac{1}{2}$ משאירים אותו בחוץ). עושים כך עוד פעם, רושמים Y. ועוד פעם, רושמים Z.

---

11. ההסתברות $\mathbb{P}\left(X=Y\right)$ שווה ל-

(א) $\frac{1}{100}$ (ב) $\frac{1}{10}$ (ג) $\frac{1}{200}$

.....

12. ההסתברות $\mathbb{P}\left(X=Y=Z\right)$ שווה ל-

(א) $\frac{1}{100}$ (ב) $\frac{1}{400}$ (ג) $\frac{1}{4000}$

.....

13. ההסתברות $\mathbb{P}\left(X=Z\right)$ שווה ל-

(א) $\frac{1}{20}$ (ב) $\frac{19}{400}$ (ג) $\frac{3}{80}$

.....

14. ההסתברות $\mathbb{P}\left(Y=Z\right)$ שווה ל-

(א) $\frac{3}{80}$ (ב) $\frac{1}{20}$ (ג) $\frac{19}{360}$

.....

15.

(א) המאורעות $X=Y$, $Y=Z$, $X=Z$ תלויים, אך בלתי תלויים בזוגות.

(ב) המאורעות $X=Y$ ו- $X=Z$ תלויים, אך המאורעות $X=Y$ ו- $Y=Z$ בלתי תלויים.

(ג) המאורעות $X=Y$ ו- $Y=Z$ תלויים, אך המאורעות $X=Y$ ו- $X=Z$ בלתי תלויים.

סוגיה 3

יהיו X,Y **מ"מ.**

.16

(א) אם X,Y **ב"ת ו-** $\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(Y)=0$ **אז** $\mathrm{Var}(XY)=\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)$;
התשובות (ב), (ג) אינן נכונות.

(ב) אם $\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(Y)=0$ **אז** $\mathrm{Var}(XY)=\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)$.

(ג) אם X,Y **ב"ת אז** $\mathrm{Var}(XY)=\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)$.

יהיו X,Y,Z **מ"מ ב"ת ש"ה,** $\mathbb{E}(X)=\mu$, $\mathrm{Var}(X)=\sigma^2$.

.17

(א) $\mathrm{Var}(XYZ)=\sigma^2(\sigma^4+3\sigma^2\mu^2+3\mu^4)$.

(ב) $\mathrm{Var}(XYZ)=\sigma^4(\sigma^2+3\mu^2)$.

(ג) $\mathrm{Var}(XYZ)=\sigma^6-\mu^6$.

יהיו X,Y,Z **מ"מ ש"ה,** $\mathbb{P}(X=1)=\frac{1}{2}=\mathbb{P}(X=-1)$, **והמאורעות** $X>0$,
$Y>0$, $Z>0$ **בלתי תלויים** ***בזוגות*** **.**

.18

(א) אין מספיק נתונים כדי למצוא $\mathbb{E}(X+Y+Z)$.

(ב) $\mathbb{E}(X+Y+Z)=0$, $\mathrm{Var}(X+Y+Z)=9$.

(ג) $\mathbb{E}(X+Y+Z)=0$, **אך אין מספיק נתונים כדי למצוא** $\mathrm{Var}(X+Y+Z)$.

. . . . . .

.19

(א) $\mathbb{E}(XY+YZ+XZ)=0$, **אך אין מספיק נתונים כדי למצוא**
$\mathrm{Var}(XY+YZ+XZ)$.

(ב) אין מספיק נתונים כדי למצוא $\mathbb{E}(XY+YZ+XZ)$.

(ג) $\mathbb{E}(XY+YZ+XZ)=0$, $\mathrm{Var}(XY+YZ+XZ)=3$.

רשימת נוסחאות

ההתפלגות		$\mathbb{P}\left(X=k\right)$	$\mathbb{E}\left(X\right)$	$\mathrm{Var}\left(X\right)$
בינומית	$B(n,p)$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
פואסון	$P(\lambda)$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	λ
גיאומטרית	$G(p)$	$p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
אחידה ב-$\{1,\ldots,n\}$	$U(n)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
בינומית-שלילית	$NB(n,p)$	$\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}$	$\frac{n}{p}$	$n\frac{1-p}{p^2}$
היפרגיאומטרית	$H(n;R,W)$	$\frac{\binom{R}{k}\binom{W}{n-k}}{\binom{R+W}{n}}$	$n\frac{R}{R+W}$	$n\frac{RW}{(R+W)^2}\left(1-\frac{n-1}{R+W-1}\right)$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots \quad (-1<x<1)$$

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\ldots$$

$$\mathbb{E}\left(Y\right)=\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(Y\,\middle|\,X\right)\right)$$

$$\mathrm{Var}\left(Y\right)=\mathbb{E}\left(\mathrm{Var}\left(Y\,\middle|\,X\right)\right)+\mathrm{Var}\left(\mathbb{E}\left(Y\,\middle|\,X\right)\right)$$

$$\hat{Y}=\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X-\mathbb{E}\left(X\right))+\mathbb{E}\left(Y\right)$$

λ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$e^{-\lambda}$	0.905	0.819	0.741	0.670	0.607	0.549	0.497	0.449	0.407

λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$e^{-\lambda}$	0.368	0.135	0.0498	0.0183	0.0067	0.0025	0.0009	0.0003	0.0001