מספר מחברת_____

מספר ת.ז._____

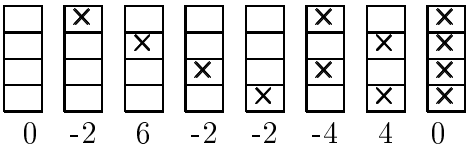
סמסטר א', מועד ב', תשס"ו
תאריך הבחינה: 24.03.2006
מספר קורס: 0365-1102

בחינה במבוא להסתברות

המורים: פרופ' יצחק מלכסון, פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.
מותר להשתמש בדף סכום אישי, ובמחשב כיס.
השאלון מורכב מ-20 שאלות המבוססות על 4 סוגיות. רצוי לענות על כולן.
לכל שאלה ניתנות 3 תשובות. סמן בטבלת התשובות את התשובה הנראית לך נכונה.
באם כל התשובות נראות לך לא נכונות סמן (ד).
סימון התשובה הנכונה במקום המתאים בטבלה שבתחתית עמוד זה מזכה ב-6 נקודות זכות. סימון תשובה לא נכונה נושא שתי נקודות חובה.
הנבחן רשאי לסמן יותר מתשובה אחת באותה שאלה.

דוגמה:



סה"כ הנקודות האפשרי הוא 120.
לעזרתך מצורפת רשימת נוסחאות וטבלת ההתפלגות הנורמלית.

בהצלחה!

	1	2
א		
ב		
ג		
ד		

	3	4	5	6	7	8	9
א							
ב							
ג							
ד							

	10	11	12	13	14	15
א						
ב						
ג						
ד						

	16	17	18	19	20
א					
ב					
ג					
ד					

סוגיה 1

דוגמים באקראי וללא החזרה n קלפים מתוך 13 קלפים ממוספרים מ- 1 עד 13 . יהי X_n סכום המספרים הרשומים ב- n הקלפים שבמדגם.

---

1. מצא את ההסתברות $\mathbb{P}\left(X_{12}=90\right)$.

(א) $\frac{1}{13}$ (ב) 0 (ג) $\frac{1}{13!}$

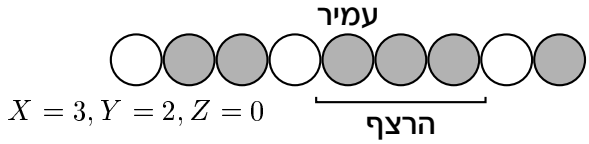
.....

2. מצא את ההסתברות $\mathbb{P}\left(X_{11}=80\right)$.

(א) $\frac{10}{169}$ (ב) $\frac{10}{13}$ (ג) $\frac{5}{78}$

סוגיה 2

עמיר עומד בטור של חיילים. כל חייל הוא בלונדיני (בסיכוי $1/4$) או ברונטי (בסיכוי $3/4$) ללא תלות באחרים; אבל עמיר הוא ברונטי. הטור הוא אינסופי בשני הכיוונים, ימינה ושמאלה מעמיר.
נתבונן ברצף הברונטים שמכיל את עמיר. אורך הרצף הוא $X=Y+1+Z$ כאשר Y הוא מספר הברונטים (ברצף) ימינה מעמיר ו- Z הוא מספר הברונטים (ברצף) שמאלה מעמיר.
דוגמה:



---

3. מצא את ההסתברות $\mathbb{P}\left(X=1\right)$.

(א) $\frac{1}{16}$ (ב) $\frac{9}{16}$ (ג) $\frac{1}{4}$

.....

4. מצא את התוחלת $\mathbb{E}(X)$.

(א) $\frac{5}{3}$ (ב) 16 (ג) 7

.....

5. מצא את השונות $\mathrm{Var}\left(X\right)$.

(א) $\frac{4}{9}$ (ב) 240 (ג) 24

.....

6. מצא את ההתפלגות של X .

(א) $X\sim P(7)$ (ב) $X+1\sim NB(2,\frac{1}{4})$ (ג) $X\sim G(\frac{1}{16})$

.....

7. מצא את השונות המשותפת $\mathrm{Cov}\left(X,\, Y-Z\right)$.

(א) 12 (ב) -12 (ג) 0

.....

8. מצא את מקדם המתאם בין X ל- Y .

(א) $\frac{7}{12\sqrt{2}}$ (ב) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ג) $\frac{1}{2}$

.....

9. מצא את ההסתברות המותנה $\mathbb{P}\left(X>8 \,\middle|\, Y=5\right)$.

(א) $\frac{9}{64}$ (ב) $\frac{27}{64}$ (ג) $\frac{3^8}{4^9}$

סוגיה 3

יהיו $A_1, A_2, \ldots, A_{10}$ עשרה מאורעות כך ש- $\mathbb{P}\left(A_1\right)=\cdots=\mathbb{P}\left(A_{10}\right)=0.1$. עבור $k=1,2,\ldots,10$ יהי X_k האינדיקטור של A_k , ו- $S_k=X_1+\cdots+X_k$ מספר המאורעות שהתרחשו מבין $A_1,\ldots,A_k$.

---

10. מה ניתן לומר על S_{10} ?

(א) $S_{10}\sim B(10,0.1)$ ולכן $\mathbb{E}\left(S_{10}\right)=1$, $\mathrm{Var}\left(S_{10}\right)=0.9$.

(ב) $\mathbb{E}\left(S_{10}\right)=1$, אבל אין מספיק נתונים כדי לחשב את $\mathrm{Var}\left(S_{10}\right)$.

(ג) $\mathbb{E}\left(S_{10}\right)=1$, $\mathrm{Var}\left(S_{10}\right)=0.9$, אבל S_{10} לא בהכרח בינומי.

.....

11. הערכים שמקדם המיתאם $\rho(X_1,X_2)$ יכול לקבל הם:

(א) כל ערך בקטע $[-\frac{1}{9},1]$.

(ב) כל ערך בקטע $[-1,1]$.

(ג) $-\frac{1}{9}$, 0 , 1 (בלבד).

מעתה והלאה נניח כי קיים מספר p כך ש- $\mathbb{P}\left(A_k\cap A_l\right)=p$ לכל k,l : $1\le k<l\le 10$.

---

12. אם $p=0.01$ אז:

(א) $\mathbb{E}\left(S_{10}\right)=1$, $\mathrm{Var}\left(S_{10}\right)=0.9$, אבל S_{10} לא בהכרח בינומי.

(ב) $S_{10}\sim B(10,0.1)$ ולכן $\mathbb{E}\left(S_{10}\right)=1$, $\mathrm{Var}\left(S_{10}\right)=0.9$.

(ג) $\mathbb{E}\left(S_{10}\right)=1$, אבל אין מספיק נתונים כדי לחשב את $\mathrm{Var}\left(S_{10}\right)$.

.....

13. אם $p=0.01$ אז מקדם המיתאם $\rho(S_5,S_8)$ הוא

(א) אין מספיק נתונים כדי לחשב אותו (ב) $\sqrt{\frac{5}{8}}$ (ג) $\frac{\sqrt{39}}{8}$

.....

14. אם $p=0$ אז מקדם המיתאם $\rho(S_5,S_8)$ הוא

(א) $\sqrt{\frac{5}{8}}$ (ב) 0.5 (ג) אין מספיק נתונים כדי לחשב אותו

.....

15. אם $p = 0.1$ אז מקדם המיתאם $\rho(S_5, S_8)$ הוא

(א) $\frac{\sqrt{39}}{8}$ (ב) אין מספיק נתונים כדי לחשב אותו (ג) 1

סוגיה 4

כמו בסוגיה 2, אבל כאן גם עמיר הוא בלונדיני (בסיכוי $1/4$) או ברונטי (בסיכוי $3/4$) ללא תלות באחרים; ובהתאמה הרצף (באורך $X = Y + 1 + Z$) המכיל את עמיר הוא רצף של בלונדינים או של ברונטים.

16. מה אפשר לומר על מ"מ Y, Z ?

(א) תלויים, אך בלתי תלויים בהנתן צבע שיער של עמיר.

(ב) בלתי תלויים, אך תלויים בהנתן צבע שיער של עמיר.`

(ג) בלתי תלויים, וגם בלתי תלויים בהנתן צבע שיער של עמיר.

.....

17. מצא את ההסתברות $\mathbb{P}\left(X = 1\right)$.

(א) $\frac{5}{8}$ (ב) $\frac{5}{16}$ (ג) $\frac{3}{16}$

.....

18. מצא את התוחלת $\mathbb{E}(X)$.

(א) $\frac{13}{3}$ (ב) $\frac{26}{3}$ (ג) $\frac{17}{3}$

.....

19. מצא את השונות המשותפת $\mathrm{Cov}\left(Y,\ Z\right)$.

(א) $\frac{40}{9}$ (ב) $\frac{4}{3}$ (ג) 0

.....

20. מצא את ערך השכיח של Y.

(א) 2 (ב) 1 (ג) 0

רשימת נוסחאות

ההתפלגות		$\mathbb{P}\left(X=k\right)$	$\mathbb{E}\left(X\right)$	$\mathrm{Var}\left(X\right)$
בינומית	$B(n,p)$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
פואסון	$P(\lambda)$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	λ
גיאומטרית	$G(p)$	$p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
אחידה ב-$\{1,\ldots,n\}$	$U(n)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
בינומית-שלילית	$NB(n,p)$	$\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}$	$\frac{n}{p}$	$n\frac{1-p}{p^2}$
היפרגיאומטרית	$H(n;R,W)$	$\frac{\binom{R}{k}\binom{W}{n-k}}{\binom{R+W}{n}}$	$n\frac{R}{R+W}$	$n\frac{RW}{(R+W)^2}\left(1-\frac{n-1}{R+W-1}\right)$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots \quad (-1<x<1)$$

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\ldots$$

$$\mathbb{E}\left(Y\right)=\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(Y\,\middle|\,X\right)\right)$$

$$\mathrm{Var}\left(Y\right)=\mathbb{E}\left(\mathrm{Var}\left(Y\,\middle|\,X\right)\right)+\mathrm{Var}\left(\mathbb{E}\left(Y\,\middle|\,X\right)\right)$$

$$\hat{Y}=\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X-\mathbb{E}\left(X\right))+\mathbb{E}\left(Y\right)$$

λ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$e^{-\lambda}$	0.905	0.819	0.741	0.670	0.607	0.549	0.497	0.449	0.407

λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$e^{-\lambda}$	0.368	0.135	0.0498	0.0183	0.0067	0.0025	0.0009	0.0003	0.0001