מספר מחברת_____

מספר ת.ז._____

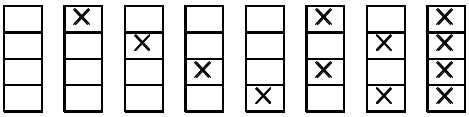
סמסטר א', מועד א', תשס"ו
תאריך הבחינה: 21.02.2006
מספר קורס: 0365-1102

בחינה במבוא להסתברות

המורים: פרופ' יצחק מלכסון, פרופ' בוריס צירלסון

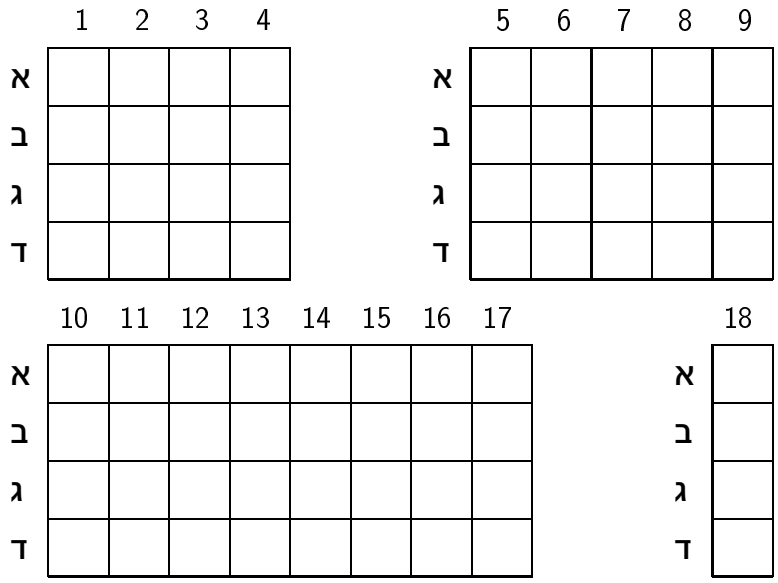
משך הבחינה: 3 שעות.
מותר להשתמש בדף סכום אישי, ובמחשב כיס.
השאלון מורכב מ-18 שאלות המבוססות על 4 סוגיות. רצוי לענות על כולן.
לכל שאלה ניתנות 3 תשובות. סמן בטבלת התשובות את התשובה הנראית לך נכונה.
באם כל התשובות נראות לך לא נכונות סמן (ד).
סימון התשובה הנכונה במקום המתאים בטבלה שבתחתית עמוד זה מזכה ב-6 נקודות זכות. סימון תשובה לא נכונה נושא שתי נקודות חובה.
הנבחן רשאי לסמן יותר מתשובה אחת באותה שאלה.

דוגמה:



סה"כ הנקודות האפשרי הוא 108.
לעזרתך מצורפת רשימת נוסחאות וטבלת ההתפלגות הנורמלית.

בהצלחה!



סוגיה 1

באולימפיאדה לפירות משתתפות נבחרות מ- 10 מדינות (בינהן ישראל וצרפת). בכל נבחרת 4 נציגים: בננה, אבוקדו, שסק ותפוז. סה"כ משתתפים באולימפיאדה 40 פירות. בוחרים באופן מקרי 10 משתתפים ונותנים להם תעודת מצטיינות. נגדיר את המ"מ הבאים:
X : מספר הישראלים מבין עשרת המצטיינים;
Y : מספר הצרפתים מבין עשרת המצטיינים;
Z : מספר הבננות מבין עשרת המצטיינים.

---

1. ההתפלגות של X היא:
(א) בינומית (ב) גאומטרית (ג) היפרגאומטרית

.....

2. X ו- Y הם:
(א) ב"ת ולא ש"ה (ב) ב"ת וש"ה (ג) תלויים וש"ה

.....

3. מה ניתן לומר על $\mathbb{E}\left(Z \middle| X\right)$?
(א) $\mathbb{E}\left(Z \middle| X\right) = \mathbb{E}(Z)$.
(ב) $\mathbb{E}\left(Z \middle| X\right) = \frac{X}{4}$.
(ג) $\mathbb{E}\left(Z \middle| X\right) = \mathbb{E}(X)$.

.....

4. מה ניתן לומר על X ו- Z ?
(א) $\mathrm{Cov}\left(X, Z\right) < 0$.
(ב) בלתי תלויים.
(ג) $\mathrm{Cov}\left(X, Z\right) > 0$.

סוגיה 2

בתהליך יצור של עכברים למחשב, הסיכוי למוצר פגום הוא 0.002 , ללא תלות באחרים. חבילה של $2\,000$ עכברים נבדקה ע"י שני בקרי איכות, כל אחד בדק $1\,000$. מוצר תקין ימצא תקין בודאות, אך מוצר פגום יתגלה כפגום בסיכוי 0.9 אצל בקר א' ובסיכוי 0.6 אצל בקר ב'. יהי X מספר העכברים הכולל שנמצאו בלתי תקינים.

---

5. ההתפלגות של X היא
(א) בינומית (בדיוק).
(ב) נורמלית בקירוב סביר.
(ג) פואסונית (בדיוק).

.....

6. מצא $\mathbb{E}\left(X\right)$.
(א) 3 (ב) 2.16 (ג) 2.4

.....

7. מצא $\mathrm{Var}\left(X\right)$.
(א) 3 (ב) 2.991 (ג) $2.995\ldots$

.....

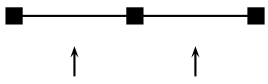
8. מצא בקירוב את $p=\mathbb{P}\left(X<2\right)$.
(א) $p<0.05$ (ב) $0.15<p<0.25$ (ג) $0.05<p<0.15$

.....

9. אם הסיכוי לעכבר פגום היה 0.1 במקום 0.002 , מצא בקירוב את ההסתברות p שבקר א' יגלה לפחות 100 עכברים פגומים.
(א) $0.2<p<0.3$ (ב) $p<0.2$ (ג) $0.3<p<0.4$

סוגיה 3

בגדר שלשה גלאי פריצה (ראה ציור). כל גלאי תקין בהסתברות $2/3$ ללא תלות באחרים. שני עבריינים מנסים לפרוץ את הגדר, דרך חצאים שונים בגדר. פריצה מצליחה אם ורק אם שני הגלאים הסמוכים מקולקלים.



---

10. מה ההסתברות לפריצה מוצלחת אחת לפחות?
(א) $\frac{5}{27}$ (ב) $\frac{2}{9}$ (ג) $\frac{4}{27}$

.....

11. מה הסיכוי המותנה לכך ששתי הפריצות מוצלחות, בהנתן שלפחות אחת הפריצות הצליחה?

(א) $\frac{1}{5}$ (ב) $\frac{1}{3}$ (ג) $\frac{1}{4}$

כעת הגדר ארוכה יותר, בת 8 גלאים, ויש 7 עבריינים המנסים לפרוץ אותו (ראה ציור). יהי X מספר הגלאים המקולקלים ו- Y מספר הפריצות המוצלחות.

---

12. **מצא** $\mathbb{E}(Y)$.

(א) $\frac{8}{3}$ (ב) $\frac{28}{9}$ (ג) $\frac{7}{9}$

.....

13. **מצא** $\mathrm{Var}(Y)$.

(א) $\frac{80}{81}$ (ב) $\frac{140}{81}$ (ג) $\frac{68}{81}$

.....

14. **מצא** $\mathbb{P}(Y \neq 0 \,|\, X = 2)$.

(א) $\frac{1}{4}$ (ב) $\frac{3^5}{2^8}$ (ג) $\frac{2}{7}$

.....

15. **מצא** $\mathbb{P}(Y \neq 0 \,|\, X = 3)$.

(א) $\frac{9}{14}$ (ב) $\frac{2}{3}$ (ג) $\frac{3^5}{2^8}$

.....

16. **מצא** $\mathbb{P}(X = 3 \,|\, Y \neq 0,\ X \leq 3)$.

(א) $\frac{7}{10}$ (ב) $\frac{18}{25}$ (ג) $\frac{1}{2}$

.....

17. **האם** $\mathbb{P}(X - 2 \leq Y \leq X - 1) > 0.5$?

(א) כן; זה נובע מאי-שוויון צ'בישב (אך לא מרקוב).

(ב) כן; זה נובע מאי-שוויון מרקוב.

(ג) לא; זה סותר את אי-שוויון מרקוב.

סוגיה 4

18. יהיו A, B מאורעות ו- $\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B$ המציינים (האינדיקטורים) שלהם.

(א) אם A, B זרים אז $\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B$ ב"ת.

(ב) אם A, B זרים אז $\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B$ בלתי מתואמים.

(ג) אם $\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B$ ב"ת אז A, B זרים.

רשימת נוסחאות

ההתפלגות		$\mathbb{P}\left(X=k\right)$	$\mathbb{E}\left(X\right)$	$\mathrm{Var}\left(X\right)$
בינומית	$B(n,p)$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
פואסון	$P(\lambda)$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	λ
גיאומטרית	$G(p)$	$p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
אחידה ב-$\{1,\ldots,n\}$	$U(n)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
בינומית-שלילית	$NB(n,p)$	$\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}$	$\frac{n}{p}$	$n\frac{1-p}{p^2}$
היפרגיאומטרית	$H(n;R,W)$	$\frac{\binom{R}{k}\binom{W}{n-k}}{\binom{R+W}{n}}$	$n\frac{R}{R+W}$	$n\frac{RW}{(R+W)^2}\left(1-\frac{n-1}{R+W-1}\right)$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots \quad (-1<x<1)$$

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\ldots$$

$$\mathbb{E}\left(Y\right)=\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(Y\,\middle|\,X\right)\right)$$

$$\mathrm{Var}\left(Y\right)=\mathbb{E}\left(\mathrm{Var}\left(Y\,\middle|\,X\right)\right)+\mathrm{Var}\left(\mathbb{E}\left(Y\,\middle|\,X\right)\right)$$

$$\hat{Y}=\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X-\mathbb{E}\left(X\right))+\mathbb{E}\left(Y\right)$$

λ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$e^{-\lambda}$	0.905	0.819	0.741	0.670	0.607	0.549	0.497	0.449	0.407

λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$e^{-\lambda}$	0.368	0.135	0.0498	0.0183	0.0067	0.0025	0.0009	0.0003	0.0001