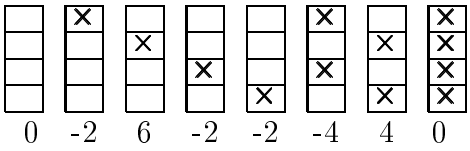
סמסטר ב', מועד ב', תשס"ה
מספר התלמיד_____ תאריך הבחינה: 27.09.2005
מספר קורס: 0365-1102

בחינה במבוא להסתברות

המורה:פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.
מותר להשתמש בדף סכום אישי, ובמחשב כיס.
השאלון מורכב מ-18 שאלות המבוססות על 3 סוגיות. רצוי לענות על כולן.
לכל שאלה ניתנות 3 תשובות. סמן בטבלת התשובות את התשובה הנראית לך נכונה.
באם כל התשובות נראות לך לא נכונות סמן (ד).
סימון התשובה הנכונה במקום המתאים בטבלה שבתחתית עמוד זה מזכה ב-6 נקודות זכות. סימון תשובה לא נכונה נושא שתי נקודות חובה.
הנבחן רשאי לסמן יותר מתשובה אחת באותה שאלה.

דוגמה:



סה"כ הנקודות האפשרי הוא 108.
לעזרתך מצורפת רשימת נוסחאות.

בהצלחה!

	1	2	3	4	5	6	7
א							
ב							
ג							
ד							

	8	9	10	11	12	13
א						
ב						
ג						
ד						

	14	15	16	17	18
א					
ב					
ג					
ד					

סוגיה 1

מפזרים באופן מקרי n כדורים ב- n כדים (n^n אפשרויות, שווי הסתברות). נגדיר מ"מ:
X הוא מספר הכדורים בכד הראשון,
Y הוא מספר הכדורים בכד השני,
N הוא מספר הכדים הריקים.

---

1. ההתפלגות של X היא
(א) בינומית (ב) היפרגיאומטרית (ג) פואסונית

.....

2. מצא את ההסתברות $\mathbb{P}\left(X=0\right)$.
(א) $\frac{1}{n}$ (ב) $\frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}$ (ג) $\frac{(n-1)^n}{n^n}$

.....

3. מצא את ההסתברות $\mathbb{P}\left(X=Y=0\right)$.
(א) $\frac{(n-2)^n}{(n-1)^n}$ (ב) $\frac{1}{n(n-1)}$ (ג) $\frac{(n-2)^n}{n^n}$

.....

4. מה אפשר לומר על שני המאורעות $X=0$, $Y=0$?
(א) תלות חיובית, כלומר $\mathbb{P}\left(X=Y=0\right)>\mathbb{P}\left(X=0\right)\mathbb{P}\left(Y=0\right)$ (לכל n).
(ב) ב"ת (לכל n).
(ג) תלות חיובית עבור n -ים מסוימים, לא לכל n .

.....

5. מצא את התוחלת $\mathbb{E}(N)$.
(א) $\frac{(n-1)^n}{n^{n-1}}$ (ב) $\frac{n-1}{2}$ (ג) 1

.....

6. השווה את השונות $\mathrm{Var}\left(N\right)$ למספר $a=n\mathbb{P}\left(X=0\right)\mathbb{P}\left(X\neq 0\right)$.
(א) $\mathrm{Var}\left(N\right)<a$ עבור n -ים מסוימים, לא לכל n .
(ב) $\mathrm{Var}\left(N\right)=a$ (לכל n).
(ג) $\mathrm{Var}\left(N\right)<a$ (לכל n).

.....

7. מה אפשר לומר על השונות $\mathrm{Var}\left(\frac{N}{n}\right)$ עבור $n\to\infty$?
(א) שואפת ל- ∞ .
(ב) מתכנסת למספר סופי, לא אפס.
(ג) מתכנסת ל- 0 .

סוגיה 2

מבצעים 10 ניסויים ב"ת, עם הסתברות להצלחה p בכל ניסוי ($0 < p < 1$). נגדיר מ"מ אחד ושני מאורעות:
X הוא מספר ההצלחות,
A הוא הצלחה בניסוי הראשון,
$B = \{X \neq 0\}$.

---

8. מה אפשר לומר על שני המאורעות A, B ?

(א) $B \subset A$ (ב) A, B ב"ת (ג) A, B זרים

.....

9. מצא את ההסתברות המותנה $\mathbb{P}\left(X = 1 \middle| A \right)$.

(א) $\frac{10p(1-p)^9}{1-(1-p)^{10}}$ (ב) $(1-p)^9$ (ג) 1

.....

10. מצא את ההסתברות המותנה $\mathbb{P}\left(X = 1 \middle| B \right)$.

(א) $(1-p)^9$ (ב) $\frac{10p(1-p)^9}{1-(1-p)^{10}}$ (ג) 1

.....

11. מצא את התוחלת המותנה $\mathbb{E}\left(X \middle| A \right)$.

(א) $\frac{10p}{1-(1-p)^{10}}$ (ב) $1+9p$ (ג) 1

.....

12. מצא את התוחלת המותנה $\mathbb{E}\left(X \middle| B \right)$.

(א) $\frac{10p}{1-(1-p)^{10}}$ (ב) $1+9p$ (ג) 1

.....

13. מה אפשר לומר על היחס $\frac{\mathbb{E}\left(X-1 \middle| B \right)}{\mathbb{E}\left(X-1 \middle| A \right)}$ כאשר $p \to 0$?

(א) מתכנס ל- $\frac{1}{2}$ (ב) מתכנס ל- $\frac{10}{9}$ (ג) מתכנס ל- 1

סוגיה 3

צג מורכב מ- 7 קטעים:

כל קטע מאיר בהסתברות p ללא תלות באחרים ($0 < p < 1$). ארבעת הצירופים

(ורק אלה) נחשבים מוצלחים.
נניח תחילה ש- $p = \frac{1}{2}$.

---

14. מצא את ההסתברות להצלחה.

(א) $\frac{1}{32}$ (ב) $\frac{4}{7}$ (ג) $\frac{128^4 - 127^4}{128^4}$

. . . . . .

15. מצא את ההסתברות (המותנה) להצלחה בהנתן שמאירים 5 קטעים (בדיוק).

(א) $\frac{1}{42}$ (ב) $\frac{1}{10}$ (ג) $\frac{1}{128}$

עבור p כלשהו נסמן ב- $f(p)$ את ההסתברות להצלחה, וב- $g(p)$ את ההסתברות (המותנה) להצלחה בהנתן שמאירים 5 קטעים (בדיוק).

---

16. מצא $\frac{f(1/3)}{f(2/3)}$.

(א) 1 (ב) $\frac{1}{16}$ (ג) $\frac{1}{2}$

. . . . . .

17. מה אפשר לומר על הפונקציה g בקטע $(0,1)$?

(א) קבועה (ב) לא מונוטונית (ג) עולה ממש

. . . . . .

18. יש שני צגים, הראשון בעל $p = \frac{1}{3}$, השני בעל $p = \frac{2}{3}$. בחרו באופן מקרי צג אחד (לפי הסתברויות $1/2, 1/2$), בצעו עמו את הניסוי, והתקבלה הצלחה. מצא את ההסתברות המותנה לכך שנבחר הצג הראשון.

(א) $\frac{1}{17}$ (ב) $\frac{1}{2}$ (ג) $\frac{1}{3}$

רשימת נוסחאות

ההתפלגות		$\mathbb{P}\left(X=k\right)$	$\mathbb{E}\left(X\right)$	$\mathrm{Var}\left(X\right)$
בינומית	$B(n,p)$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
פואסון	$P(\lambda)$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	λ
גיאומטרית	$G(p)$	$p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
אחידה ב-$\{1,\ldots,n\}$	$U(n)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
בינומית-שלילית	$NB(n,p)$	$\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}$	$\frac{n}{p}$	$n\frac{1-p}{p^2}$
היפרגיאומטרית	$H(n;R,W)$	$\frac{\binom{R}{k}\binom{W}{n-k}}{\binom{R+W}{n}}$	$n\frac{R}{R+W}$	$n\frac{RW}{(R+W)^2}\left(1-\frac{n-1}{R+W-1}\right)$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots \quad (-1<x<1)$$

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\ldots$$

$$\mathbb{E}\left(Y\right)=\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(Y\,\middle|\,X\right)\right)$$

$$\mathrm{Var}\left(Y\right)=\mathbb{E}\left(\mathrm{Var}\left(Y\,\middle|\,X\right)\right)+\mathrm{Var}\left(\mathbb{E}\left(Y\,\middle|\,X\right)\right)$$

$$\hat{Y}=\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X-\mathbb{E}\left(X\right))+\mathbb{E}\left(Y\right)$$