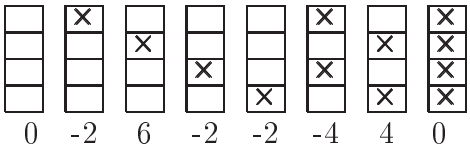
סמסטר ב', מועד א', תשס"ה
מספר התלמיד_____ תאריך הבחינה: 07.06.2005
מספר קורס: 0365-1102

בחינה במבוא להסתברות

המורה:פרופ' בוריס צירלסון

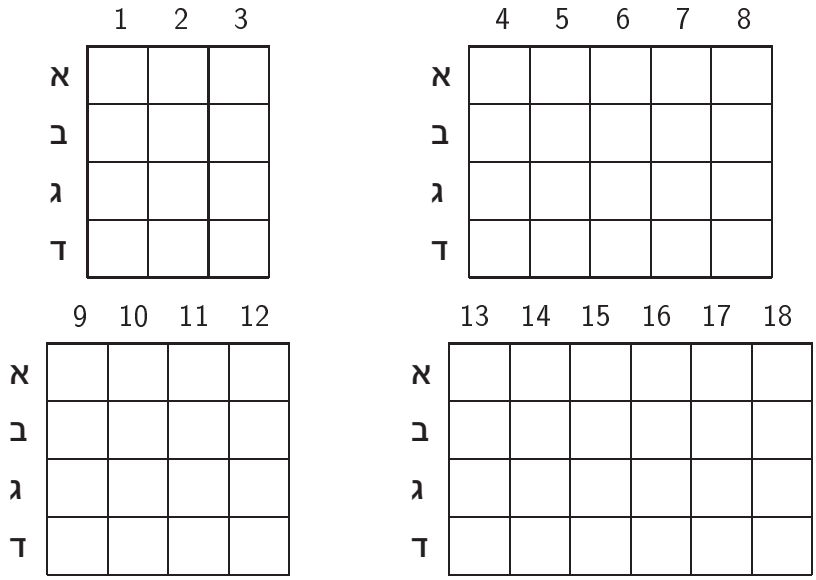
משך הבחינה: 3 שעות.
מותר להשתמש בדף סכום אישי, ובמחשב כיס.
השאלון מורכב מ-18 שאלות המבוססות על 4 סוגיות. רצוי לענות על כולן.
לכל שאלה ניתנות 3 תשובות. סמן בטבלת התשובות את התשובה הנראית לך נכונה.
באם כל התשובות נראות לך לא נכונות סמן (ד).
סימון התשובה הנכונה במקום המתאים בטבלה שבתחתית עמוד זה מזכה ב-6 נקודות זכות. סימון תשובה לא נכונה נושא שתי נקודות חובה.
הנבחן רשאי לסמן יותר מתשובה אחת באותה שאלה.

דוגמה:



סה"כ הנקודות האפשרי הוא 108.
לעזרתך מצורפת רשימת נוסחאות.

בהצלחה!



סוגיה 1

כיתה מכילה 10 בנות ו- 10 בנים.

---

1. מסדרים את הכיתה באופן מקרי. מצא את ההסתברות לכך שבנות תופסות את 10 המקומות הראשונים.

(א) $\frac{20!}{(10!)^2 2^{20}}$ (ב) $\frac{(10!)^2}{20!}$ (ג) $\frac{1}{2^{10}}$

.....

2. דוגמים מהכיתה מדגם סדור בגודל 20 *עם החזרה*. מצא את ההסתברות לכך ש- 10 המקומות הראשונים במדגם תפוסים ע"י בנות, ו- 10 המקומות האחרונים תפוסים ע"י בנים.

(א) $\frac{20!}{(10!)^2 2^{20}}$ (ב) $\frac{1}{2^{10}}$ (ג) $\frac{(10!)^2}{20!}$

.....

3. דוגמים מהכיתה מדגם סדור בגודל 20 עם החזרה. מצא את ההסתברות לכך שבנות תופסות 10 מקומות (כלשהם) במדגם, ובנים תופסים 10 מקומות.

(א) $\frac{1}{2^{10}}$ (ב) $\frac{(10!)^2}{20!}$ (ג) $\frac{20!}{(10!)^2 2^{20}}$

סוגיה 2

נתונים 9 כרטיסים עם אותיות

ה	ט	ט	ט	י	י	ס	ס	ק

---

4. מסדרים את הכרטיסים בסדר מקרי. מצא את ההסתברות שיתקבל

ס	ט	ט	י	ס	ט	י	ק	ה

(א) $\frac{1}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7}$ (ב) $\frac{1}{2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7}$ (ג) $\frac{1}{2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7}$

.....

5. דוגמים מהכרטיסים מדגם סדור בגודל 9 , *עם החזרה*. מצא את ההסתברות שיתקבל

ס	ט	ט	י	ס	ט	י	ק	ה

(א) $\frac{2^3}{3^{17}}$ (ב) $\frac{2^4}{3^{15}}$ (ג) $\frac{1}{3^{18}}$

.....

6. דוגמים מהכרטיסים מדגם סדור בגודל 9, עם החזרה. מצא את ההסתברות לכך שהמדגם מכיל 3 פעמים, ט פעמיים, ס פעמיים, ה פעם אחת וגם ק פעם אחת.

(א) $\frac{1}{3^{18}}$ (ב) $\frac{2^4}{3^{15}}$ (ג) $\frac{2^8 \cdot 5 \cdot 7}{3^{12}}$

.....

7. דוגמים שוב מדגם סדור בגודל 9, עם החזרה. יהי X מספר הפעמים שהמדגם מכיל ט, ו- Y מספר הפעמים שהמדגם מכיל ס. מצא את התוחלת המותנה $\mathbb{E}\left(Y \middle| X\right)$.

(א) 2 (ב) $2-\frac{2}{9}X$ (ג) $3-\frac{1}{3}X$

.....

8. מצא את השונות המותנה $\mathrm{Var}\left(Y \middle| X\right)$ עבור X,Y משאלה 7.

(א) $\frac{14}{9}$ (ב) $\frac{14}{9}-\frac{14}{81}X$ (ג) $2-\frac{2}{9}X$

סוגיה 3

בשלב ראשון מגרילים מספר X (לפי התפלגות לאו דווקא אחידה) מתוך $\{0,1,2,\ldots,n\}$. בשלב שני דוגמים מתוך $\{1,2,\ldots,n\}$ מדגם M בגודל X, לא סדור, ללא החזרה.

---

9. מה אפשר לומר על ההסתברות $\mathbb{P}\left(1 \in M\right)$ לכך שמספר 1 שייך למדגם?

רמז: התניה ב- X.

(א) $\mathbb{P}\left(1 \in M\right) = \mathbb{P}\left(X = 1\right)$.

(ב) $\mathbb{P}\left(1 \in M\right) = \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(X\right)$.

(ג) $\mathbb{P}\left(1 \in M\right) = \frac{1}{n}X$.

.....

10. מה אפשר לומר על התלות בין שני המאורעות, $1 \in M$ ו- $2 \in M$?

(א) תלות שלילית.

(ב) תלות חיובית אם $n\mathbb{E}\left(X^2 - X\right) > (n-1)(\mathbb{E}\left(X\right))^2$,
אי-תלות אם $n\mathbb{E}\left(X^2 - X\right) = (n-1)(\mathbb{E}\left(X\right))^2$,
תלות שלילית אם $n\mathbb{E}\left(X^2 - X\right) < (n-1)(\mathbb{E}\left(X\right))^2$.

(ג) תלות חיובית אם $\mathbb{E}\left(X^2 - X\right) > (\mathbb{E}\left(X\right))(\mathbb{E}\left(X\right) - 1)$,
אי-תלות אם $\mathbb{E}\left(X^2 - X\right) = (\mathbb{E}\left(X\right))(\mathbb{E}\left(X\right) - 1)$,
תלות שלילית אם $\mathbb{E}\left(X^2 - X\right) < (\mathbb{E}\left(X\right))(\mathbb{E}\left(X\right) - 1)$.

.....

11. מתי שלושה המאורעות, $1 \in M$, $2 \in M$ ו- $3 \in M$ בלתי תלויים?

(א) התנאי $\mathbb{E}\left(X^3 - 3X^2 + 2X\right) = (\mathbb{E}\left(X\right))(\mathbb{E}\left(X\right) - 1)(\mathbb{E}\left(X\right) - 2)$ הוא הכרחי ומספיק.

(ב) התנאי $n^2\mathbb{E}\left(X^3 - 3X^2 + 2X\right) = (n^2 - 3n + 2)(\mathbb{E}\left(X\right))^3$ הוא הכרחי ומספיק.

(ג) התנאי $n^2\mathbb{E}(X^3-3X^2+2X)=(n^2-3n+2)(\mathbb{E}(X))^3$ הוא מספיק אך לא הכרחי.

.....

12. מתי n המאורעות, $1\in M$, $\ldots$, $2\in M$, $n\in M$ בלתי תלויים?
(א) התנאי $X\sim B(n,p)$ עבור p כלשהו הוא מספיק אך לא הכרחי.
(ב) התנאי $X\sim B(n,p)$ עבור p כלשהו הוא הכרחי אך לא מספיק.
(ג) אם ורק אם X בעל התפלגות בינומית, $X\sim B(n,p)$ עבור p כלשהו.

סוגיה 4

מטילים קוביה הוגנת 9 פעמים, מקבלים משתנים מקריים ב"ת ש"ה $X_1,X_2,\ldots,X_9$, בעלי התפלגות אחידה ב- $\{1,2,\ldots,6\}$. נגדיר הצלחה בניסוי ה- k ($k=2,\ldots,9$) ע"י אי-שוויון

$$X_k<2X_1-3$$

יהי N מספר ההצלחות בין 8 הניסויים.

---

13. מצא את ההתפלגות המותנה של N בהנתן $X_1=3$.
(א) $H(3;2,4)$ (ב) $B(8,\frac{1}{3})$ (ג) $U(0,8)$

.....

14. מצא את התוחלת $\mathbb{E}(N)$.
(א) $\frac{8}{3}(X_1-2)$ (ב) 4 (ג) $\frac{8}{3}$

.....

15. כמה ערכים שונים מקבל המ"מ $\mathrm{Var}\left(N\,\middle|\,X_1\right)$ (שונות מותנה)?
(א) 6 (ב) 4 (ג) 3

.....

16. מצא יחס בין ההסתברויות המותנות $\dfrac{\mathbb{P}\left(X_1=3\,\middle|\,N=3\right)}{\mathbb{P}\left(X_1=4\,\middle|\,N=3\right)}$.
רמז: נוסחת בייז.
(א) $\frac{17}{6}$ (ב) 1 (ג) 4

.....

17. מצא את ההסתברות המותנה $\mathbb{P}\left(X_1=3\,\middle|\,N=3\right)$.
(א) $\frac{17}{27}$ (ב) $\frac{1}{2}$ (ג) $\frac{4}{5}$

.....

18. מטילים את הקוביה פעם עשירית. מצא את ההסתברות המותנה להצלחה, $\mathbb{P}\left(X_{10}<2X_1-3\,\middle|\,N=3\right)$.
(א) $\frac{1}{2}$ (ב) $\frac{2}{5}$ (ג) $\frac{1}{3}$

רשימת נוסחאות

ההתפלגות		$\mathbb{P}\left(X=k\right)$	$\mathbb{E}\left(X\right)$	$\mathrm{Var}\left(X\right)$
בינומית	$B(n,p)$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
פואסון	$P(\lambda)$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	λ
גיאומטרית	$G(p)$	$p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
אחידה ב-$\{1,\ldots,n\}$	$U(n)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
בינומית-שלילית	$NB(n,p)$	$\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}$	$\frac{n}{p}$	$n\frac{1-p}{p^2}$
היפרגיאומטרית	$H(n;R,W)$	$\frac{\binom{R}{k}\binom{W}{n-k}}{\binom{R+W}{n}}$	$n\frac{R}{R+W}$	$n\frac{RW}{(R+W)^2}\left(1-\frac{n-1}{R+W-1}\right)$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots \quad (-1<x<1)$$

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\ldots$$

$$\mathbb{E}\left(Y\right)=\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(Y\,\middle|\,X\right)\right)$$

$$\mathrm{Var}\left(Y\right)=\mathbb{E}\left(\mathrm{Var}\left(Y\,\middle|\,X\right)\right)+\mathrm{Var}\left(\mathbb{E}\left(Y\,\middle|\,X\right)\right)$$

$$\hat{Y}=\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X-\mathbb{E}\left(X\right))+\mathbb{E}\left(Y\right)$$