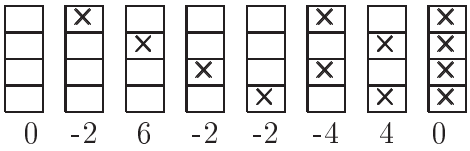
סמסטר ב', מועד ב', תשס"ד
מספר התלמיד_____ תאריך הבחינה: 01.10.2004
מספר קורס: 0365-1102

בחינה במבוא להסתברות

המורה:פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.
מותר להשתמש בדף סכום אישי, ובמחשב כיס.
השאלון מורכב מ-20 שאלות המבוססות על 4 סוגיות. רצוי לענות על כולן.
לכל שאלה ניתנות 3 תשובות. סמן בטבלת התשובות את התשובה הנראית לך נכונה.
באם כל התשובות נראות לך לא נכונות סמן (ד).
סימון התשובה הנכונה במקום המתאים בטבלה שבתחתית עמוד זה מזכה ב-6 נקודות זכות. סימון תשובה לא נכונה נושא שתי נקודות חובה.
הנבחן רשאי לסמן יותר מתשובה אחת באותה שאלה.

דוגמה:



סה"כ הנקודות האפשרי הוא 120.
לעזרתך מצורפת רשימת נוסחאות.

בהצלחה!

	1	2	3	4	5	6
א						
ב						
ג						
ד						

	7	8	9	10
א				
ב				
ג				
ד				

	11	12	13	14
א				
ב				
ג				
ד				

	15	16	17	18	19	20
א						
ב						
ג						
ד						

סוגיה 1

שני מבקרים בודקים (באופן בלתי תלוי) משלוח של n מוצרים. כל מוצר תקין בהסתברות $1-p=q$ ללא תלות באחרים. כל מבקר דוגם מתוך המשלוח מדגם בגודל k *עם החזרה*.
יהי X מספר המוצרים הלא תקינים במדגם של מבקר ראשון, Y — של מבקר שני, Z — במשלוח כולו.

---

1. מצא את התוחלת והשונות של X ; השווה לתוחלת kp ושונות kpq של התפלגות בינומית $B(k,p)$.

רמז: התנייה ב- Z .

(א) $\mathbb{E}\left(X\right)>kp$, $\mathrm{Var}\left(X\right)>kpq$.
(ב) $\mathbb{E}\left(X\right)=kp$, $\mathrm{Var}\left(X\right)=kpq$.
(ג) $\mathbb{E}\left(X\right)=kp$, $\mathrm{Var}\left(X\right)<kpq$.

. . . . . .

2. ואם $n\to\infty$ (אבל k קבוע), לאן שואפת השונות?

(א) $\lim_{n\to\infty}\mathrm{Var}\left(X\right)=kpq$.
(ב) הגבול לא קיים.
(ג) $\lim_{n\to\infty}\mathrm{Var}\left(X\right)>kpq$.

. . . . . .

3. מצא את השונות המשותפת $\mathrm{Cov}\left(X,\,Y\right)$.

רמז: התנייה ב- Z .

(א) $\frac{k^2}{n}pq$ (ב) 0 (ג) k^2p^2

. . . . . .

4. מצא את מקדם המתאם $r(X,Y)$.

(א) $\frac{k}{n+k-1}$ (ב) $\frac{k}{n}$ (ג) $\frac{kp}{q}$

. . . . . .

5. ואם $n\to\infty$ (אבל k קבוע), לאן שואף מקדם המתאם?

(א) $0<\lim_{n\to\infty}r(X,Y)<1$.
(ב) $\lim_{n\to\infty}r(X,Y)=0$.
(ג) $\lim_{n\to\infty}r(X,Y)=1$.

. . . . . .

6. ואם $k\to\infty$ (אבל n קבוע), לאן שואף מקדם המתאם?

(א) $\lim_{k\to\infty}r(X,Y)=0$.
(ב) הגבול לא קיים.
(ג) $0<\lim_{k\to\infty}r(X,Y)<1$.

סוגיה 2

מזכיר רשלני שלח 100 מכתבים ל- 100 אנשים (שלא הכירו אחד את שני) באקראי (ההסתברות $\frac{1}{100!}$ לכל תמורה). כל איש שקיבל מכתב המיועד לאיש אחר מתקשר לאיש האחר הזה ועושה היכרות איתו. כל פעם ששני אנשים מכירים אותו איש שלישי, הם מכירים גם אחד את שני.
יהי N מספר המכרים של רון (אחד מהאנשים), כולל רון עצמו.

---

7. מצא את ההסתברות $\mathbb{P}\left(N=1\right)$.
(א) $\frac{1}{99}$ (ב) $\frac{1}{100!}$ (ג) $\frac{1}{100}$

.....

8. מצא $\mathbb{P}\left(N=2\right)$.
רמז: קודם מצא $\mathbb{P}\left(N=2 \,\middle|\, N>1\right)$.
(א) $\frac{99}{10\,000}$ (ב) $\frac{99}{100!}$ (ג) $\frac{1}{100}$

.....

9. זהה את ההתפלגות של מ"מ N.
(א) $\mathrm{B}(100,0.01)$ (ב) $\mathrm{U}(100)$ (ג) $\mathrm{H}(n;1,99)$

יהי M מספר המכרים של יורם (גם אחד מהאנשים), כולל יורם עצמו.

---

10. זהה את ההתפלגות המותנה של מ"מ M בהנתן ש- $N=30$ ורון לא מכיר את יורם.
(א) $\mathrm{B}(70,1/70)$ (ב) $\mathrm{H}(n;1,69)$ (ג) $\mathrm{U}(70)$

סוגיה 3

משפחה של שני אנשים חוגגת ימי הולדת פעמים בשנה, 10 באפריל (יום ה-100 בתוך שנה) ו-19 ביולי (יום ה-200 בתוך שנה).
סוקר מתקשר ביום מקרי (ההסתברות $\frac{1}{365}$ לכל יום) ושואל שתי שאלות:
(מאורע A) האם הייה אתמול יום הולדת?
(מ"מ X) כמה ימים נשארו עד ליום הולדת הקרוב?
(יתכן שכבר היום, אז $X=0$; יתכן גם שבשנה הבאה.)
(365 ימים בכל שנה רלוונטית.)

---

11. מצא את ההסתברות $\mathbb{P}\left(A\right)$.
(א) $\frac{1}{182}$ (ב) $\frac{2}{365}$ (ג) $1-\left(\frac{364}{365}\right)^2\approx 0.0055$

.....

12. מצא את התוחלת $\mathbb{E}\left(X\right)$.

(א) $\frac{99 \cdot 100 + 264 \cdot 265}{2 \cdot 365} \approx 109.4$ (ב) $\frac{99 \cdot 100 + 264 \cdot 265}{2 \cdot 363} = 110$

(ג) 181.5

13. מצא את התוחלת המותנה $\mathbb{E}\left(X \middle| A\right)$.

(א) 181.5 (ב) ≈ 109.4 (ג) 110

14. מצא את התוחלת המותנה $\mathbb{E}\left(X \middle| \overline{A}\right)$.

(א) 110 (ב) ≈ 109.4 (ג) 181.5

סוגיה 4

סוקר מתקשר למשפחה נבחרת באקראי ושואל ארבע שאלות:

(מ"מ N) כמה אנשים יש במשפחה?

(מ"מ K) כמה ימים בשנה יש יום הולדת לאחד מבני המשפחה לפחות?

(מאורע A) האם הייה אתמול יום הולדת?

(מ"מ X) כמה ימים נשארו עד ליום ההולדת הקרוב?

לכל אחד יש יום הולדת מקרי (ההסתברות $\frac{1}{365}$ לכל יום), ללא תלות באחרים.

15. מצא $\mathbb{P}\left(A \middle| N=5, K=k\right)$ עבור $k=1,2,3,4,5$.

(א) $\frac{1}{73}$ (ב) $\frac{1}{365}\binom{5}{k}$ (ג) $\frac{k!}{365}$

16. מצא $\mathbb{P}\left(A \middle| N=5\right)$.

(א) $1-\left(\frac{364}{365}\right)^5 \approx 0.014$ (ב) $\frac{3}{365}$ (ג) $\frac{1}{73}$

17. מצא $\mathbb{E}\left(X \middle| N=2, K=1\right)$.

(א) $\frac{364^2}{729} \approx 181.8$ (ב) 181.5 (ג) 182

18. מצא $\mathbb{E}\left(X \middle| N=2, K=2, A\right)$.

(א) 182 (ב) ≈ 181.8 (ג) 181.5

19. מצא $\mathbb{P}\left(K=1 \middle| N=2, A\right)$.

(א) $\frac{1}{365}$ (ב) $\frac{1}{729}$ (ג) $\frac{1}{364}$

20. מצא $\mathbb{E}\left(X \middle| N=2, A\right)$.

(א) 182 (ב) ≈ 181.8 (ג) 181.5

רשימת נוסחאות

ההתפלגות		$\mathbb{P}\left(X=k\right)$	$\mathbb{E}\left(X\right)$	$\mathrm{Var}\left(X\right)$
בינומית	$B(n,p)$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
פואסון	$P(\lambda)$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	λ
גיאומטרית	$G(p)$	$p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
אחידה ב-$\{1,\ldots,n\}$	$U(n)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
בינומית-שלילית	$NB(n,p)$	$\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}$	$\frac{n}{p}$	$n\frac{1-p}{p^2}$
היפרגיאומטרית	$H(n;R,W)$	$\frac{\binom{R}{k}\binom{W}{n-k}}{\binom{R+W}{n}}$	$n\frac{R}{R+W}$	$n\frac{RW}{(R+W)^2}\left(1-\frac{n-1}{R+W-1}\right)$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots \quad (-1<x<1)$$

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\ldots$$

$$\mathbb{E}\left(Y\right)=\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(Y\,\middle|\,X\right)\right)$$

$$\mathrm{Var}\left(Y\right)=\mathbb{E}\left(\mathrm{Var}\left(Y\,\middle|\,X\right)\right)+\mathrm{Var}\left(\mathbb{E}\left(Y\,\middle|\,X\right)\right)$$

$$\hat{Y}=\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X-\mathbb{E}\left(X\right))+\mathbb{E}\left(Y\right)$$