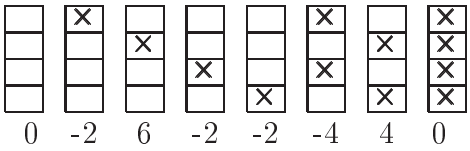
סמסטר ב', מועד א', תשס"ד
מספר התלמיד_____ תאריך הבחינה: 15.06.2004
מספר קורס: 0365-1102

בחינה במבוא להסתברות

המורה:פרופ' בוריס צירלסון

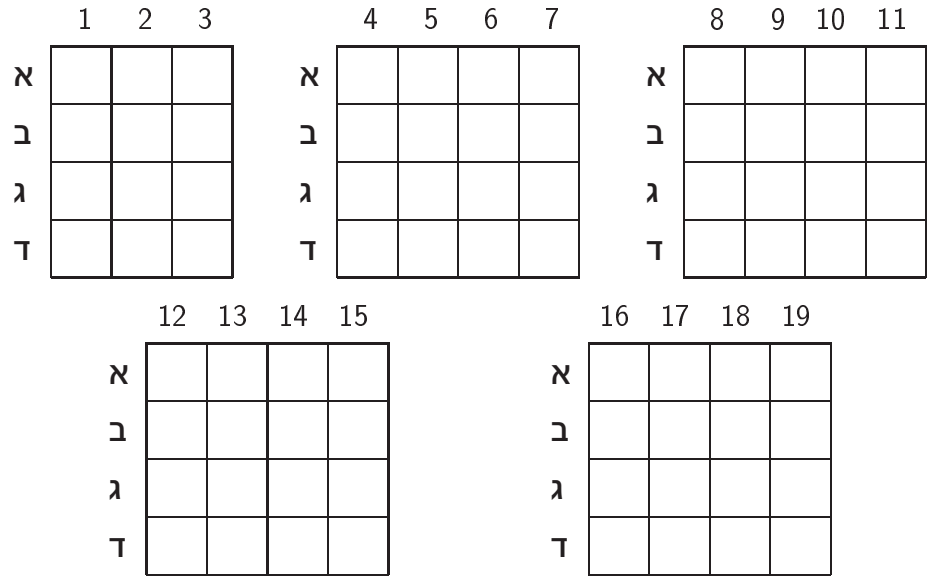
משך הבחינה: 3 שעות.
מותר להשתמש בדף סכום אישי, ובמחשב כיס.
השאלון מורכב מ-19 שאלות המבוססות על 5 סוגיות. רצוי לענות על כולן.
לכל שאלה ניתנות 3 תשובות. סמן בטבלת התשובות את התשובה הנראית לך נכונה.
באם כל התשובות נראות לך לא נכונות סמן (ד).
סימון התשובה הנכונה במקום המתאים בטבלה שבתחתית עמוד זה מזכה ב-6 נקודות זכות. סימון תשובה לא נכונה נושא שתי נקודות חובה.
הנבחן רשאי לסמן יותר מתשובה אחת באותה שאלה.

דוגמה:



סה"כ הנקודות האפשרי הוא 114.
לעזרתך מצורפת רשימת נוסחאות.

בהצלחה!



סוגיה 1

ילד מצא שמונה כרטיסים עם ספרות

2	0	0	4	2	0	0	4

וסידר אותם מחדש בסדר מקרי (ההסתברות $\frac{1}{8!}$ לכל תמורה).

---

1. מצא את ההסתברות שארבעת הכרטיסים הראשונים מציגים שוב את 2004 .

(א) $\frac{1}{35}$ (ב) $\frac{1}{840}$ (ג) $\frac{1}{24}$

יהי X מספר המקרים (0 , 1 או 2) שהצירוף 2004 מופיע (ברצף) בסדרה החדשה.

---

2. מצא את התוחלת $\mathbb{E}(X)$.

(א) $1-\left(\frac{23}{24}\right)^5$ (ב) $\frac{4}{35}$ (ג) $\frac{1}{7}$

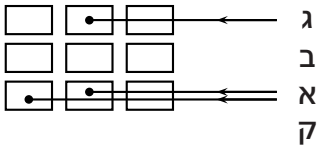
. . . . . .

3. מצא את ההסתברות $\mathbb{P}\left(X=2\right)$.

(א) $\frac{1}{420}$ (ב) $\frac{1}{96}$ (ג) $\frac{1}{8!}$

סוגיה 2

בבית יש 9 דירות: 3 דירות בקומה א', 3 דירות בקומה ב', 3 דירות בקומה ג'. שלושה דיירים משלוש דירות שונות (ההסתברות $1/\binom{9}{3}$ לכל שלישיית דירות) נכנסים למעלית בקומת קרקע. המעלית עולה מקומה לקומה סמוכה במשך 5 שניות. עצירת המעלית בקומה אחת לוקחת 10 שניות. יהי T הזמן שהמעלית תצטרך כדי להוביל את הדיירים, N מספר העצירות שלה, H הגובה (מספר קומות) שהיא תעלה. למשל,



$$N=2, \quad H=3, \quad T=35.$$

---

4. מצא $\mathbb{P}\left(T=30\right)$.

(א) $\frac{3}{14}$ (ב) $\frac{5}{42}$ (ג) $\frac{3}{28}$

. . . . . .

5. האם יש משתנים מקריים בלתי תלויים בין T,N,H ?

(א) T,N ב"ת, T,H ב"ת, אבל N,H תלויים.

(ב) לא; יש תלות בכול זוג.

(ג) הם תלויים, אבל ב"ת בזוגות.

.....

6. מצא $\mathbb{E}\left(\operatorname{Var}\left(N\middle|T\right)\right)$ (תוחלת של שונות מותנה).

(א) לא מוגדר. (ב) 0 (ג) $\frac{13}{12}$

.....

7. האם יש מקדמי מתאם ± 1 בין T,N,H ?

(א) כן, $r(N,H)=-1$, אבל $|r(N,T)|<1$, $|r(H,T)|<1$.

(ב) לא, $|r(N,H)|<1$, $|r(N,T)|<1$, $|r(H,T)|<1$.

(ג) כן, $r(N,T)=+1$ ו- $r(H,T)=+1$, אבל $|r(N,H)|<1$.

סוגיה 3

לכל אחד מתוך 10 משתמשי האינטרנט (רונית, שרית, דוד ואחרים) יש רמת חברותיות ששווה $1,0$ או 2 בסיכוים שווים, ללא תלות באחרים. שני משתמשים הם בקשר אם ורק אם סכום של רמות החברותיות שלהם שווה 3 או יותר.

---

8. מצא את ההסתברות שרונית ושרית הן בקשר.

(א) $\frac{1}{30}$ (ב) $\frac{2}{9}$ (ג) $\frac{1}{2}$

יהי X מספר הזוגות (לא סדורות) שהם בקשר.

---

9. מצא $\mathbb{E}\left(X\right)$.

(א) $\frac{10}{3}$ (ב) 15 (ג) 30

.....

10. מצא את ההסתברות שיש קשר גם בין רונית ושרית וגם בין שרית ודוד.

(א) $\frac{5}{27}$ (ב) $\frac{5}{9}$ (ג) $\frac{1}{9}$

.....

11. מצא $\operatorname{Var}\left(X\right)$ והשווה ל- $\mathbb{E}\left(X\right)$.

(א) $\operatorname{Var}\left(X\right)<\mathbb{E}\left(X\right)$.

(ב) $\mathbb{E}\left(X\right)\leq\operatorname{Var}\left(X\right)<2\mathbb{E}\left(X\right)$.

(ג) $3\mathbb{E}\left(X\right)\leq\operatorname{Var}\left(X\right)<4\mathbb{E}\left(X\right)$.

סוגיה 4

יהי (X,Y,Z) מדגם סדור בגודל 3 , ללא החזרה, מתוך הקבוצה $\{1,2,\ldots,10\}$.

---

12. מצא $\mathbb{P}\left(X<Z,Y<Z\right)$.

רמז: $(X,Y,Z)\sim(X,Z,Y)\sim(Z,X,Y)\sim\ldots$

(א) $\frac{1}{6}$ (ב) $\frac{10!}{8!9!}$ (ג) $\frac{1}{3}$

13. **מצא** $\mathbb{P}\left(Z=8\right)$.

(א) $\frac{3}{10}$ (ב) $\frac{7}{40}$ (ג) $\frac{1}{8}$

14. **מצא** $\mathbb{P}\left(Z=8\,\middle|\,Y<Z\right)$.

(א) $\frac{1}{5}$ (ב) $\frac{7}{45}$ (ג) $\frac{1}{9}$

15. **מצא** $\mathbb{P}\left(Z=8\,\middle|\,X<Y<Z\right)$.

(א) $\frac{3}{11}$ (ב) $\frac{1}{8}$ (ג) $\frac{7}{40}$

סוגיה 5

בשלב הראשון בוחרים באקראי מספר N לפי התפלגות אחידה $U(0,9)$. בשלב השני דוגמים מדגם E לא סדור בגודל N, ללא החזרה, מתוך הקבוצה $\{1,2,\ldots,9\}$. (יתכן ש- $N=0$, אז $E=\emptyset$.)

16. **מצא** $\mathbb{P}\left(N=7\right)$.

(א) $\frac{2!7!}{10!}$ (ב) $\frac{1}{9}$ (ג) $\frac{2!7!}{9!}$

17. **מצא** $\mathbb{P}\left(N=7\,\middle|\,1\in E\right)$.

(א) $\frac{7}{45}$ (ב) $\frac{1}{9}$ (ג) $\frac{1}{5}$

18. **מצא** $\mathbb{P}\left(N=7\,\middle|\,1\in E,2\in E\right)$.

(א) $\frac{3}{11}$ (ב) $\frac{7}{40}$ (ג) $\frac{1}{8}$

19. **מצא** $\mathbb{P}\left(1\in E,2\in E\right)$.

(א) $\frac{1}{6}$ (ב) $\frac{10!}{8!9!}$ (ג) $\frac{1}{3}$

רשימת נוסחאות

ההתפלגות		$\mathbb{P}\left(X=k\right)$	$\mathbb{E}\left(X\right)$	$\mathrm{Var}\left(X\right)$
בינומית	$B(n,p)$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
פואסון	$P(\lambda)$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	λ
גיאומטרית	$G(p)$	$p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
אחידה ב-$\{1,\ldots,n\}$	$U(n)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
בינומית-שלילית	$NB(n,p)$	$\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}$	$\frac{n}{p}$	$n\frac{1-p}{p^2}$
היפרגיאומטרית	$H(n;R,W)$	$\frac{\binom{R}{k}\binom{W}{n-k}}{\binom{R+W}{n}}$	$n\frac{R}{R+W}$	$n\frac{RW}{(R+W)^2}\left(1-\frac{n-1}{R+W-1}\right)$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots \quad (-1<x<1)$$

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\ldots$$

$$\mathbb{E}\left(Y\right)=\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(Y\,\middle|\,X\right)\right)$$

$$\mathrm{Var}\left(Y\right)=\mathbb{E}\left(\mathrm{Var}\left(Y\,\middle|\,X\right)\right)+\mathrm{Var}\left(\mathbb{E}\left(Y\,\middle|\,X\right)\right)$$

$$\hat{Y}=\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X-\mathbb{E}\left(X\right))+\mathbb{E}\left(Y\right)$$