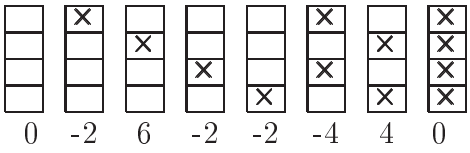
סמסטר ב', מועד ב', תשס"ג
מספר התלמיד_____ תאריך הבחינה: 25.09.2003
מספר קורס: 0365-1102

בחינה במבוא להסתברות

המורה:פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.
מותר להשתמש בדף סכום אישי, ובמחשב כיס.
השאלון מורכב מ-20 שאלות המבוססות על 3 סוגיות. רצוי לענות על כולן.
לכל שאלה ניתנות 3 תשובות. סמן בטבלת התשובות את התשובה הנראית לך נכונה.
באם כל התשובות נראות לך לא נכונות סמן (ד).
סימון התשובה הנכונה במקום המתאים בטבלה שבתחתית עמוד זה מזכה ב-6 נקודות זכות. סימון תשובה לא נכונה נושא שתי נקודות חובה.
הנבחן רשאי לסמן יותר מתשובה אחת באותה שאלה.

דוגמה:



סה"כ הנקודות האפשרי הוא 120.
לעזרתך מצורפת רשימת נוסחאות.

בהצלחה!

	1	2	3	4	5	6	7	8
א								
ב								
ג								
ד								

	9	10	11	12	13	14
א						
ב						
ג						
ד						

	15	16	17	18	19	20
א						
ב						
ג						
ד						

סוגיה 1

יש 100 כדורים ממוספרים $0, 1, \ldots, 99$. כדור אחד נבחר באקראי. יהי X המספר שלו, N מספר הספרות ב- X , Y סכום הספרות ב- X . למשל:

$$X{=}0 \quad 1 \ldots 7 \ldots 10 \ldots 23 \ldots 99$$

$$N{=}0 \quad 1 \ldots 1 \ldots \ 2 \ldots \ 2 \ldots \ 2$$

$$Y{=}0 \quad 1 \ldots 7 \ldots \ 1 \ldots \ 5 \ldots 18$$

---

1. מצא את ההסתברות $\mathbb{P}\left(N=2\right)$.

(א) $\frac{89}{99}$ (ב) $\frac{10}{11}$ (ג) $\frac{1}{3}$

.....

2. מצא את התוחלת $\mathbb{E}\left(N\right)$.

(א) 1 (ב) 1.89 (ג) 1.8

.....

3. מצא $\mathbb{E}\left(X\right)$.

(א) 49.5 (ב) 54.5 (ג) 50

.....

4. מצא את התוחלת המותנה $\mathbb{E}\left(X \,\middle|\, N=2\right)$.

(א) 49.5 (ב) 49.05 (ג) 54.5

.....

5. מצא את השונות המותנה $\mathrm{Var}\left(X \,\middle|\, N=1\right)$.

(א) 49.05 (ב) $\frac{3}{5}$ (ג) $\frac{20}{3}$

.....

6. מצא $\mathbb{E}\left(NX\right)$.

(א) 114 (ב) 98.55 (ג) 93.555

.....

7. (א) $\mathrm{Cov}\left(N,\,X\right) < 0$.
(ב) מ"מ N, X ב"ת.
(ג) $\mathrm{Cov}\left(N,\,X\right) > 0$.

.....

8. מצא את השונות המשותפת $\mathrm{Cov}\left(X,\,Y\right)$.

(א) $\frac{220}{3}$ (ב) $\frac{363}{4}$ (ג) 93.555

רמז: $X = 10U + V$, $Y = U + V$.

סוגיה 2

מפזרים באקראי את ארבעת המספרים $1,2,3,4$ בארבע משבצות של טבלה 2×2, מספר אחד בכל משבצת. למשל: $\begin{smallmatrix}3&1\\2&4\end{smallmatrix}$. נגדיר מאורעות
A : סכום המספרים בשורה ראשונה שווה לסכום המספרים בשורה שניה;
B : סכום המספרים בעמודה ראשונה שווה לסכום המספרים בעמודה שניה;
C : סכום המספרים באלכסון ראשון שווה לסכום המספרים באלכסון שני.

9.
(א) מאורעות A,B,C תלויים, אבל ב"ת בזוגות;
(ב) מאורעות A,B,C ב"ת;
(ג) מאורעות A,B,C זרים בזוגות.

.....

10. מצא את ההסתברות $\mathbb{P}\left(A\right)$.
(א) $\frac{1}{2}$ (ב) $\frac{1}{6}$ (ג) $\frac{1}{4}$

הניסוי כמו לע"ל בוצע פעמיים (באופן ב"ת).

---

11. מאורע B התרחש בשני הניסויים. מצא את ההסתברות (המותנה) לכך שכל הטבלה בניסוי השני זהה לטבלה בניסוי הראשון.
(א) $\frac{1}{3}$ (ב) $\frac{1}{16}$ (ג) $\frac{1}{8}$

.....

12. מאורע B לא התרחש באף אחד משני הניסויים. מצא את ההסתברות (המותנה) לכך שכל הטבלה בניסוי השני זהה לטבלה בניסוי הראשון.
(א) $\frac{1}{3}$ (ב) $\frac{1}{16}$ (ג) $\frac{1}{8}$

.....

13. מאורע B התרחש בשני הניסויים. מצא את ההסתברות (המותנה) לכך שהמספר במשבצת עליונה ימנית הוא אותו המספר בשני הניסויים.
(א) $\frac{1}{8}$ (ב) $\frac{2}{3}$ (ג) $\frac{1}{4}$

.....

14. התרחש ששורה ראשונה בניסוי השני זהה לשורה שניה בניסוי הראשון. מצא את ההסתברות (המותנה) לכך שלפחות אחד מהמאורעות A,B,C התרחש פעמיים.
(א) $\frac{2}{3}$ (ב) $\frac{1}{3}$ (ג) $\frac{1}{4}$

סוגיה 3

n ערים יכולות לשלוח נציגים לכנס. כל עיר שולחת נציג אחד או לא משתתפת, בסיכויים $1/2$, $1/2$, באופן בלתי תלוי בערים אחרות. נציגים מגיעים בסדר מקרי. נגדיר מאורעות
A : העיר הכי צפונית משתתפת;
B : העיר הכי דרומית משתתפת;
C : הנציג הראשון שהגיע הוא מהעיר הכי דרומית.
נניח שמספר הערים $n = 2$.

---

15. מצא את ההסתברות $\mathbb{P}\left(C\right)$.

(א) $\frac{1}{2}$ (ב) $\frac{1}{3}$ (ג) $\frac{3}{8}$

16. מצא את ההסתברות המותנה $\mathbb{P}\left(A \,\middle|\, C\right)$.

(א) $\frac{1}{4}$ (ב) $\frac{3}{8}$ (ג) $\frac{1}{2}$

נניח עתה שמספר הערים $n = 4$. נגדיר עוד מאורע
D : משתתפים 2 ערים בדיוק.

---

17. מצא $\mathbb{P}\left(A \,\middle|\, D\right)$.

(א) $\frac{1}{4}$ (ב) $\frac{17}{45}$ (ג) $\frac{1}{2}$

18. מצא $\mathbb{P}\left(C \,\middle|\, D\right)$.

(א) $\frac{17}{45}$ (ב) $\frac{1}{2}$ (ג) $\frac{1}{4}$

19. מצא $\mathbb{P}\left(C\right)$.

(א) $\frac{1}{4}$ (ב) $\frac{15}{64}$ (ג) $\frac{17}{45}$

20. מצא $\mathbb{P}\left(A \,\middle|\, C\right)$.

(א) $\frac{15}{64}$ (ב) $\frac{17}{45}$ (ג) $\frac{1}{2}$

רשימת נוסחאות

ההתפלגות		$\mathbb{P}\left(X=k\right)$	$\mathbb{E}\left(X\right)$	$\mathrm{Var}\left(X\right)$
בינומית	$B(n,p)$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
פואסון	$P(\lambda)$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	λ
גיאומטרית	$G(p)$	$p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
אחידה ב-$\{1,\ldots,n\}$	$U(n)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
בינומית-שלילית	$NB(n,p)$	$\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}$	$\frac{n}{p}$	$n\frac{1-p}{p^2}$
היפרגיאומטרית	$H(n;R,W)$	$\frac{\binom{R}{k}\binom{W}{n-k}}{\binom{R+W}{n}}$	$n\frac{R}{R+W}$	$n\frac{RW}{(R+W)^2}\left(1-\frac{n-1}{R+W-1}\right)$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots \quad (-1<x<1)$$

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\ldots$$

$$\mathbb{E}\left(Y\right)=\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(Y\,\middle|\,X\right)\right)$$

$$\mathrm{Var}\left(Y\right)=\mathbb{E}\left(\mathrm{Var}\left(Y\,\middle|\,X\right)\right)+\mathrm{Var}\left(\mathbb{E}\left(Y\,\middle|\,X\right)\right)$$

$$\hat{Y}=\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X-\mathbb{E}\left(X\right))+\mathbb{E}\left(Y\right)$$