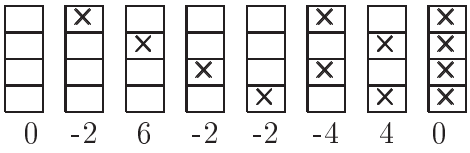
סמסטר ב', מועד א', תשס"ג
מספר התלמיד_____ תאריך הבחינה: 10.06.2003
מספר קורס: 0365-1102

בחינה במבוא להסתברות

המורה:פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.
מותר להשתמש בדף סכום אישי, ובמחשב כיס.
השאלון מורכב מ-20 שאלות המבוססות על 4 סוגיות. רצוי לענות על כולן.
לכל שאלה ניתנות 3 תשובות. סמן בטבלת התשובות את התשובה הנראית לך נכונה.
באם כל התשובות נראות לך לא נכונות סמן (ד).
סימון התשובה הנכונה במקום המתאים בטבלה שבתחתית עמוד זה מזכה ב-6 נקודות זכות. סימון תשובה לא נכונה נושא שתי נקודות חובה.
הנבחן רשאי לסמן יותר מתשובה אחת באותה שאלה.

דוגמה:



סה"כ הנקודות האפשרי הוא 120.
לעזרתך מצורפת רשימת נוסחאות.

בהצלחה!

	1	2	3	4	5	6	7	8
א								
ב								
ג								
ד								

	9	10	11	12	13
א					
ב					
ג					
ד					

	14	15	16	17
א				
ב				
ג				
ד				

	18	19	20
א			
ב			
ג			
ד			

סוגיה 1

בטבלה של 3×3 משבצות, כל משבצת היא לבנה (בסיכוי $1/2$) או כחולה (בסיכוי $1/2$), והן ב"ת. נסמן ב- N את מספר המשבצות הלבנות וב- X את מספר השורות הלבנות (כלומר, שורות של שלוש משבצות לבנות).

---

1. ההתפלגות של N היא:
(א) בינומית-שלילית. (ב) היפרגיאמטרית. (ג) אחידה.

.....

2. ההתפלגות של X היא:
(א) אחידה $U(0,3)$.
(ב) בינומית $B(3,1/8)$.
(ג) היפרגיאמטרית $H(3;X,9-X)$.

.....

3. נתבונן בתוחלת המותנה $\mathbb{E}\left(X \,\middle|\, N=n\right)$. מתי היא מתאפסת?
(א) אף פעם לא.
(ב) אם ורק אם $n=0$.
(ג) אם ורק אם $n \in \{0,1,2\}$.

.....

4. ההסתברות $\mathbb{P}\left(\mathbb{E}\left(X \,\middle|\, N\right)=0\right)$ היא:
(א) $\frac{7}{64}$ (ב) $\frac{23}{256}$ (ג) 0

.....

5. נתבונן בשונות מותנה $\mathrm{Var}\left(X \,\middle|\, N=n\right)$. מתי היא מתאפסת?
(א) אם ורק אם $n \in \{0,1,2,8,9\}$.
(ב) אף פעם לא.
(ג) אם ורק אם $n \in \{0,1,2\}$.

.....

6. ההסתברות $\mathbb{P}\left(\mathrm{Var}\left(X \,\middle|\, N\right)=0\right)$ היא:
(א) $\frac{7}{64}$ (ב) 0 (ג) $\frac{23}{256}$

.....

7. מתי $\mathbb{E}\left(X \,\middle|\, N=n\right)=\mathbb{P}\left(X=1 \,\middle|\, N=n\right)$?
(א) אף פעם לא.
(ב) אם ורק אם $1 \le n \le 5$.
(ג) אם ורק אם $n<5$.

.....

8. מצא את ההסתברות המותנה $\mathbb{P}\left(X=0 \,\middle|\, N=5\right)$.
(א) $\frac{9}{14}$ (ב) 0 (ג) $\frac{467}{512}$

סוגיה 2

שחקן מקבל שני קלפים, כל אחד או חזק (בסיכוי $1/2$) או חלש (בסיכוי $1/2$), והם ב"ת. הוא חושף אותם אחד אחרי השני. אם יש ברירה, שחקן נועז מתחיל בקלף חזק, ושחקן לא נועז חושף קלפים בסדר מקרי.

---

9. שחקן נועז חשף קלף אחד והוא חזק. מה ההסתברות (המותנה) שהקלף האחר גם הוא חזק?

(א) $1/3$ (ב) $1/4$ (ג) $1/2$

.....

10. אותה השאלה עבור שחקן לא נועז.

(א) $1/3$ (ב) $2/5$ (ג) $1/2$

מכאן ואילך בסוגיה זו, השחקן נבחר באקראי מאוכלוסייה שמכילה 50% נועזים ו- 50% לא נועזים.

---

11. אותה השאלה שקודם (עבור השחקן המקרי).

(א) $2/5$ (ב) $1/3$ (ג) $1/4$

.....

12. השחקן חשף שני קלפים חזקים. מה ההסתברות (המותנה) שהוא נועז?

(א) $2/3$ (ב) $1/3$ (ג) $3/5$

.....

13. השחקן חשף קלף חזק ואחריו קלף חלש. מה ההסתברות (המותנה) שהוא נועז?

א) $2/3$ (ב) $3/5$ (ג) $1/2$

סוגיה 3

נתונה מקלדת בעלת k מקשים, $k > 9$. קוף מבצע סדרה של הקשות בלתי תלויות ובעלות התפלגות אחידה על מקשי המקלדת. המקלדת מורכבת מ- 9 המקשים $\boxed{1}$, . . . , $\boxed{9}$, ועוד $(k-9)$ מקשים אחרים שכל אחד מהם מפסיק את הקלט. יהי N מספר הספרות הנקלטות ו- X כפל של הספרות. נסכים ש- $X = 1$ כאשר $N = 0$.

.....

14. ההתפלגות של $N + 1$ היא:

(א). היפרגיאומטרית, $H(1; k-9, 9)$.

(ב). גיאומטרית, $G\left(\frac{k-9}{k}\right)$.

(ג). בינומית, $B\left(k, \frac{k-9}{k}\right)$.

---

15. התוחלת המותנה $\mathbb{E}\left(X \,\middle|\, N = n\right)$ היא:

(א) $\left(\frac{9}{k-9}\right)^n$. (ב) $\frac{9}{k-9}$. (ג) 5^n .

16. מתי התוחלת של X היא סופית:
(א) אם ורק אם $k > 18$.
(ב) אם ורק אם $k > 45$.
(ג) אם ורק אם $\mathbb{E}(N) < \infty$.

17. מתי השונות של X היא סופית:
(א) אם ורק אם $k > 45$.
(ב) אם ורק אם $k > 285$.
(ג) אם ורק אם $\mathrm{Var}(N) < \infty$.

סוגיה 4

נתונה קוביה גדולה עם פאות $1,2,3,4,5,6$ וקוביה קטנה עם פאות $1,1,2,2,3,3$. מטילים אותן $100 = 2 \times 50$ פעמים בזו אחר זו: גדולה, קטנה, גדולה, קטנה, . . . יהי X מספר הפעמים שיתקבל הרצף $1,2$ (קודם 1 , אחר-כך 2), Y מספר הפעמים שיתקבל הרצף $6,1$ (קודם 6 , אחר-כך 1).

18. מצא $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$.
(א) $\mathbb{E}(X) = \frac{11}{2}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{1487}{324}$.
(ב) $\mathbb{E}(X) = \frac{11}{2}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{1683}{324}$.
(ג) $\mathbb{E}(X) = \frac{50}{9}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{425}{81}$.

19. מצא $\mathbb{E}(Y)$, $\mathrm{Var}(Y)$.
(א) $\mathbb{E}(Y) = \frac{11}{2}$, $\mathrm{Var}(Y) = \frac{1487}{324}$.
(ב) $\mathbb{E}(Y) = \frac{50}{9}$, $\mathrm{Var}(Y) = \frac{425}{81}$.
(ג) $\mathbb{E}(Y) = \frac{25}{9}$, $\mathrm{Var}(Y) = \frac{425}{162}$.

20. מצא חסם עליון להסתברות $\mathbb{P}(X + 3Y \geq 83)$ לפי אי-שוויון מרקוב.
(א) $\frac{4}{83}$ (ב) $\frac{1}{6}$ (ג) $\frac{6}{83}$

רשימת נוסחאות

ההתפלגות		$\mathbb{P}\left(X=k\right)$	$\mathbb{E}\left(X\right)$	$\mathrm{Var}\left(X\right)$
בינומית	$B(n,p)$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
פואסון	$P(\lambda)$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	λ
גיאומטרית	$G(p)$	$p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
אחידה ב-$\{1,\ldots,n\}$	$U(n)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
בינומית-שלילית	$NB(n,p)$	$\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}$	$\frac{n}{p}$	$n\frac{1-p}{p^2}$
היפרגיאומטרית	$H(n;R,W)$	$\frac{\binom{R}{k}\binom{W}{n-k}}{\binom{R+W}{n}}$	$n\frac{R}{R+W}$	$n\frac{RW}{(R+W)^2}\left(1-\frac{n-1}{R+W-1}\right)$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots \quad (-1<x<1)$$

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\ldots$$

$$\mathbb{E}\left(Y\right)=\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(Y\,\middle|\,X\right)\right)$$

$$\mathrm{Var}\left(Y\right)=\mathbb{E}\left(\mathrm{Var}\left(Y\,\middle|\,X\right)\right)+\mathrm{Var}\left(\mathbb{E}\left(Y\,\middle|\,X\right)\right)$$

$$\hat{Y}=\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X-\mathbb{E}\left(X\right))+\mathbb{E}\left(Y\right)$$