סמסטר ב', מועד ב', תשס"ט
תאריך הבחינה: 02.09.2009
מספר קורס: 0366-3022

בחינה במבוא לאנליזה פונקציונלית

המורה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.
רצוי לענות על כל השאלות.

בהצלחה!

שאלה 1

הוכחו או הפרכו:
(א) לכל $f \in L_2(\mathbb{R})$,

$\|f - f * \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{1}_{(0,\varepsilon)}\| \to 0$ כאשר $\varepsilon \to 0+$.

. . . .

(ב)

$\sup_{f:\|f\|\le 1} \|f - f * \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{1}_{(0,\varepsilon)}\| \to 0$ כאשר $\varepsilon \to 0+$.

שאלה 2

הוכחו או הפרכו:
(א) לכל $f \in L_2(\mathbb{R})$ קיימת אחת ורק אחת $g \in L_2(\mathbb{R})$ כך ש־

$$3g(x) - g(x-1) - g(x+2) = f(x)$$

כמעט לכל $x \in \mathbb{R}$.

. . . .

(ב) לכל $f \in L_2(\mathbb{R})$ קיימת אחת ורק אחת $g \in L_2(\mathbb{R})$ כך ש־

$$g(x+1) - g(x) = f(x)$$

כמעט לכל $x \in \mathbb{R}$.
רמז: התמרת פוריה.

שאלה 3

יהי A אופרטור סגור סימטרי, ו־B אופרטור צמוד לעצמו. הוכחו או הפרכו:
(א) אם A מרחיב את B אז $A=B$.

. . . .

(ב) אם B מרחיב את A אז $A=B$.

שאלה 4

הוכחו או הפרכו:
(א) הגבול
$$T=\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\left(x\mapsto\frac{1}{x}\right)\cdot\mathbb{1}_{(\varepsilon,1)}+(\ln\varepsilon)\cdot\delta_0\right)$$
קיים ב־$D'_1(-1,1)$.

. . . .

(ב) הגבול T קיים, ומקיים
$$\big(x\mapsto x\big)\cdot T=\mathbb{1}_{(0,1)}\,.$$
