סמסטר ב', מועד א', תשס"ט
תאריך הבחינה: 08.07.2009
מספר קורס: 0366-3022

בחינה במבוא לאנליזה פונקציונלית

המורה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.
רצוי לענות על כל השאלות.

בהצלחה!

שאלה 1

(א) מצאו את כל הקטעים $[a,b] \subset \mathbb{R}$ שעבורם פונקצית האינדיקטור

$$f = \mathbb{1}_{[a,b]} \in L_2(\mathbb{R})$$

מקיימת

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(f)) = f\,.$$

.....

(ב) אותו הדבר עבור

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(f)) = -f\,.$$

רמז: הזכרו בהתמרת פוריה ההפוכה.

שאלה 2

תהיו $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ פונקציות מדידות מקיימות $\varphi(x)\psi(x) = 1$ כמעט לכל $x \in \mathbb{R}$.
(א). נסחו והוכיחו יחס בין האופרטורים $\varphi(Q)$, $\psi(Q)$.

.....

(ב). אותו הדבר עבור $\varphi(P)$, $\psi(P)$.

שאלה 3

יהיו $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, **ו-** U **אופרטור אוניטרי. הוכחו או הפרכו:**
אם $\mathbb{1}_{\{\lambda\}}(U) \neq 0$ **אז קיים** $x \neq 0$ **כך ש-** $Ux = \lambda x$.

שאלה 4

נגדיר דיסטריבוציה $T \in D_1'(-1,1)$ **ע"י**

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_0^1 \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \, \mathrm{d}x$$

לכל $\varphi \in D_1(-1,1)$. **הוכחו או הפרכו:**
(א) קיימת $f \in L_1(-1,1)$ **כך ש-** $f' = T$;

. . . . . .

(ב) קיימת $f \in L_\infty(-1,1)$ **כך ש-** $f' = T$.