סמסטר א', מועד א', תשס"ז
תאריך הבחינה: 20.02.2007
מספר קורס: 0365-4212

בחינה בהסתברות מתקדמת

המורה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3.5 שעות.
מותר להשתמש בכל חומר שהו.
סה"כ הנקודות הוא 125. **רצוי לענות על כל השאלות.**

בהצלחה!

שאלה 1

יהי $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ ההילוך המקרי התקני בממד 1 (כלומר, $S_0 = 0$ ומ"מ $S_{n+1} - S_n$ הם ב"ת ש"ה, ± 1 בסיכוים $0.5, 0.5$).

---

25 1. **מצא (אם קיים) את**

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \mathbb{P}\left(S_{2n^2} = 2n,\ \max(S_0, S_1, \ldots, S_{2n^2}) = 3n \right).$$

שאלה 2

25 2. **האם קיימים $s_1, s_2, \cdots \in \{-1, +1\}$ כאלה שלכל $k = 0, 1, 2, \ldots$ הטור**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} s_n s_{n+1} \ldots s_{n+k}$$

מתכנס?

שאלה 3

נגדיר

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sgn} \sin(2^n \pi x)$$

(**כאן** $\operatorname{sgn} u$ **הוא** $+1$ **עבור** $u > 0$, -1 **עבור** $u < 0$, **ו-**0 **עבור** $u = 0$).

---

25 3. **האם**

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} : 0 < x + 3^{-n} k < 1} f(x + 3^{-n} k) = o(3^n)$$

עבור כמעט כל $x \in (0,1)$, **או לא?**

.....

25 4. **נגדיר** $k_n(y)$ **ע"י** $\frac{k_n(y)}{3^n} \le y < \frac{k_n(y)+1}{3^n}$. **האם**

$$\int_{k_n(y)/3^n}^{(k_n(y)+1)/3^n} f(x)\,\mathrm{d}x = o(3^{-n})$$

עבור כמעט כל $y \in (0,1)$, **או לא?**

שאלה 4

25 5. **יהיו** $X_1, X_2, \ldots$ **מ"מ חליפים** (exchangeable). **האם יתכן שהמאורע** "$X_n \to \infty$" **בעל הסתברות** 0.5 ?