סמסטר א', מועד א', תשס"ו
תאריך הבחינה: 19.02.2006
מספר קורס: 0365-4212

בחינה בהסתברות מתקדמת

המורה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3.5 שעות.
מותר להשתמש בכל חומר שהו.
סה"כ הנקודות הוא 130. רצוי לענות על כל השאלות.

בהצלחה!

שאלה 1

=45

נגדיר

$$V_n(r) = 2^{-n}\mathrm{mes}_n\{x \in [-1,1]^n : |x| < r\}$$

(כאן $|x|$ נורמה איקלידית, mes_n מידת לבג n-ממדית). יהי V_n^{-1} פונקציה הפוכה ל- V_n.

---

15 **1. הוכח או הפרך ש- $V_n^{-1}(0.5) > 0.5\sqrt{n}$ לכל n מספיק גדול.**

.....

15 **2. הוכח או הפרך ש-**

$$\frac{V_n^{-1}(0.75) - V_n^{-1}(0.5)}{V_n^{-1}(0.5) - V_n^{-1}(0.25)} \to 1$$

כאשר $n \to \infty$.

.....

15 **3. מצא (אם קיים) את**

$$\left.\frac{d}{dp}\right|_{p=0.5} \lim_{n\to\infty} (V_n^{-1}(p) - V_n^{-1}(0.5))\,.$$

רמז: משפט הגבול המרכזי. . .

שאלה 2

=25

תהי $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ פונקציה הרמונית, כלומר,

$$f(k,l) = \frac{1}{4}\big(f(k-1,l) + f(k+1,l) + f(k,l-1) + f(k,l+1)\big)$$

לכל $k, l \in \mathbb{Z}$.

---

25 **4. הוכח שאם f חסומה אז f קבועה.**
רמז: הילוך, מרטינגל, עצירה. . .

שאלה 3

=40

כד מכיל כדורים כחולים ולבנים, בסך-הכול 100 כדורים. פעם ביום מוצאים כדור נבחר באקראי (לפי התפלגות אחידה, ללא תלות בעבר) ושמים במקומו כדור בצבע אחר. יהי X_n מספר הכדורים הלבנים לאחר n ימים. נניח ש- $X_0 = 0$.

---

5. הוכח שההתפלגות של X_n לא שואפת לשום גבול (כאשר $n \to \infty$), אך ההתפלגות של X_{2n} שואפת לגבול. 20

.....

6. הוכח שלכל k 20

$$\sup_n \mathbb{P}\left(X_{2n} \geq k\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X_{2n} \geq k\right).$$

רמז: זמן הפגישה. . .

שאלה 4

=20

יהי $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ מרחב הסתברות, $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}$ שדות- σ , $\mathcal{F}_\infty$ שדה- σ נוצר ע"י $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \ldots$.

---

7. הוכח ש- $L_2(\mathcal{F}_\infty)$ הוא סגור של $L_2(\mathcal{F}_0) \cup L_2(\mathcal{F}_1) \cup \ldots$ 20

רמז: $\{A : \mathbf{1}_A \in \text{closure}(L_2(\mathcal{F}_0) \cup L_2(\mathcal{F}_1) \cup \ldots)\}$ . . .