

THÈSE PRÉSENTÉE
POUR OBTENIR LE GRADE DE
DOCTEUR DE
L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES PURES

Par José Ibrahim VILLANUEVA GUTIÉRREZ

SUR QUELQUES QUESTIONS EN THÉORIE D'IWASAWA

Sous la direction de : Jean-François JAULENT

Soutenue le 30 juin 2017 à Talence, France.

Membres du jury :

M. MAIRE, Christian	Professeur des Universités Université de Bourgogne Franche-Comté	Président
M. JAULENT, Jean-François	Professeur Emérite Université de Bordeaux	Directeur de thèse
M. GREITHER, Cornelius	Professeur des Universités Universität der Bundeswehr München	Rapporteur
M. BELLIARD, Jean-Robert	Maître de Conférences HDR Université de Bourgogne Franche-Comté	Rapporteur
M. MOVAHHEDI, Chazad	Professeur des Universités Université de Limoges	Examineur
Mme. SORIANO, Florence	Professeur des Universités Université de Lorraine	Examineur
M. BELABAS, Karim	Professeur des Universités Université de Bordeaux	Examineur
M. BILU, Yuri	Professeur des Universités Université de Bordeaux	Examineur
M. LEI, Antonio	Professeur Adjoint Université Laval	Lecteur Invité

Titre : Sur quelques questions en théorie d'Iwasawa

Résumé : Ce travail de thèse porte sur l'étude des invariants logarithmiques le long des $\mathbb{Z}_\ell^d$ -extensions et se compose de trois parties étroitement reliées.

La première partie est un compendium sur les diverses approches à l'arithmétique algorithmique, c'est-à-dire à l'étude générale des invariants logarithmiques. En particulier on y présente quatre définitions équivalentes du groupe de classes logarithmiques et on y démontre leur équivalence. On donne aussi une preuve à un théorème d'Iwasawa de type logarithmique.

La deuxième partie s'interprète comme un addenda historique sur l'étude du groupe de classes logarithmiques le long des $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions. On démontre que sous la conjecture de Gross-Kuz'min la théorie d'Iwasawa peut être bien employée pour l'étude du cas non-cyclotomique. Ainsi, on démontre des relations entre les invariants μ et λ correspondant au ℓ -groupe de classes avec les invariants $\tilde{\mu}$ et $\tilde{\lambda}$ attachés aux groupes de classes logarithmiques.

La troisième partie comporte l'étude du module d'Iwasawa logarithmique pour des $\mathbb{Z}_\ell^d$ -extensions, c'est-à-dire du groupe de Galois $X = \text{Gal}(L_d/K_d)$ de la ℓ -extension maximale abélienne logarithmiquement non-ramifiée du compositum K_d des différentes $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions d'un corps de nombres K . On démontre sous la conjecture de Gross-Kuz'min de façon analogue au cas classique, que X est bien un module noethérien et de torsion sous l'algèbre d'Iwasawa de K_d . Ainsi, on déduit des relations entre les invariants logarithmiques $\tilde{\mu}$ et $\tilde{\lambda}$ des $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions de K qui satisfont une hypothèse de décomposition. Finalement, on donne une formule qui décrit la croissance du groupe de classes logarithmiques le long des compositums de $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions non-cyclotomiques.

Mots clés : Théorie algébrique de nombres, arithmétique logarithmique, théorie d'Iwasawa, théorie ℓ -adique du corps de classes.



Cette thèse a été financée par CONACYT (Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología), le Conseil National de Science et Technologie du Mexique.

Title : On some questions in Iwasawa theory.

Abstract : This work is concerned with the study of logarithmic invariants on $\mathbb{Z}_\ell^d$ -extensions and is subdivided in three pieces, which are closely related to each other.

The first part is a compendium of the different approaches to logarithmic arithmetic, that is the study of the logarithmic invariants. In particular we show the equivalence between the four definitions of the logarithmic class group existing in the literature. Also, we give an alternative proof of an Iwasawa logarithmic result.

The second part can be thought as an historic addendum on the study of the $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions. Assuming the Gross-Kuz'min conjecture we show that the logarithmic class group can be studied in the Iwasawa setting for non-cyclotomic extensions. We also give relations between the classical μ and λ invariants and the logarithmic invariants $\tilde{\mu}$ and $\tilde{\lambda}$ attached to the logarithmic class groups.

The third part studies the properties of the Iwasawa logarithmic module for $\mathbb{Z}_\ell^d$ -extensions, that is the Galois group $X = \text{Gal}(L_d/K_d)$ of the maximal abelian ℓ -extension logarithmically unramified of the compositum K_d of the different $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions of a number field K . Assuming the Gross-Kuz'min conjecture we show that X is a noetherian torsion module over the Iwasawa algebra of K_d . We also deduce relations between the logarithmic invariants $\tilde{\mu}$ and $\tilde{\lambda}$ of the $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions of K which satisfy a splitting condition. In the end we give a formula who describes the order of the logarithmic class group along the compositum of non- cyclotomic $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions.

Keywords : Algebraic number theory, logarithmic arithmetic Iwasawa's theory, l - adic class field theory.



This thesis has been financially supported by CONACYT (Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología), the National Council of Science and Technology of Mexico.

Título : Sobre algunas preguntas en teoría de Iwasawa.

Resumen : Este trabajo trata del estudio de los invariantes logarítmicos a lo largo de $\mathbb{Z}_\ell^d$ -extensiones y consiste de tres partes estrechamente relacionadas.

La primera parte es un compendio de los diferentes enfoques de la aritmética logarítmica, es decir, del estudio de los invariantes logarítmicos. En particular, demostramos la equivalencia de las cuatro definiciones del grupo de clases logarítmicas existentes en la literatura. Además, damos una prueba alternativa a un resultado logarítmico de tipo Iwasawa.

La segunda parte puede ser pensada como un addendum en el estudio de las $\mathbb{Z}_\ell$ -extensiones. Suponiendo la conjetura de Gross-Kuz'min, mostramos que el grupo de clases logarítmicas puede ser estudiado en el contexto de la teoría de Iwasawa en extensiones no ciclotómicas. Además damos relaciones entre los invariantes clásicos μ y λ , y los invariantes logarítmicos $\tilde{\mu}$ y $\tilde{\lambda}$ asociados al grupo de clases logarítmicas.

La tercera parte estudia las propiedades del módulo de Iwasawa logarítmico para $\mathbb{Z}_\ell^d$ -extensiones, es decir el grupo de Galois $X = \text{Gal}(L_d/K_d)$ de la máxima ℓ -extensión abeliana logarítmicamente no ramificada del compositum K_d de las diferentes $\mathbb{Z}_\ell$ -extensiones de un campo de números K . Suponiendo la conjetura de Gross-Kuz'min demostramos que X es un módulo noeteriano y de torsión sobre el álgebra de Iwasawa asociada a K_d . También deducimos relaciones entre los invariantes logarítmicos $\tilde{\mu}$ y $\tilde{\lambda}$ de las $\mathbb{Z}_\ell$ -extensiones de K que satisfacen cierta hipótesis de descomposición. Al final, damos una fórmula que describe el orden de los grupos de clases logarítmicas a lo largo de compositum de $\mathbb{Z}_\ell$ -extensiones no ciclotómicas.

Palabras clave : Teoría algebraica de números, aritmética logarítmica, teoría de Iwasawa, teoría ℓ -ádica de campos de clases.



Esta tesis fue financiada por CONACYT (Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología de México).

Unité de recherche

Institut de Mathématiques de Bordeaux UMR 5251

Université de Bordeaux

351, cours de la Libération - F 33 405 TALENCE

Tél : (33)/(0)5 40 00 60 70

Fax : (33)/(0)5 40 00 21 23

Mail : institut@math.u-bordeaux.fr

À ma mère.

Remerciements

Je remercie profondément mon directeur de thèse Jean-François Jaulent de m'avoir choisi comme son dernier étudiant, fait découvrir l'univers de l'arithmétique logarithmique et consacré plusieurs matins pour en discuter. Autant sur le plan professionnel que personnel il s'est montré un exemple notamment en me rappelant les valeurs familiales.

Lors de mon séjour à l'Université Laval, j'ai été accueilli au sein de l'équipe de travail de Antonio Lei, à qui je souhaite exprimer ma gratitude. Cette expérience m'a permis d'enrichir mon spectre mathématique spécialement lors des échanges avec ses étudiants.

Je remercie mes rapporteurs Cornelius Greither et Jean-Robert Belliard pour la révision détaillée de mon travail et leurs précieux commentaires. Je remercie aussi Christian Maire, Chazad Movahhedi et Florence Soriano pour avoir accepté de faire partie du jury.

La partie finale de ce travail a été écrite dans le jardin de Yuri Bilu, que je remercie pour les discussions, ses conseils et son soutien, ainsi que de m'avoir confié son jardin.

Je tiens à remercier Karim Belabas pour m'avoir introduit au calcul arithmétique sur PARI, ainsi que Bill Allombert pour son suivi.

Un grand merci à Ale et Cristos pour les discussions inestimables sur les mathématiques reliées à cette thèse.

Grâce au support constant de ma famille et mes amis, leurs joie de vivre et leurs encouragements dans les moments difficiles, ce travail a été une merveilleuse expérience. Merci de toute mon âme !

Table des matières

Introduction	13
1 Arithmétique Logarithmique	17
1.1 Théorie ℓ -adique des corps de classes	18
1.1.1 Le groupe des classes d'idèles généralisés	18
1.1.2 Valeurs absolues ℓ -adiques	20
1.1.3 Extensions cyclotomique et localement cyclotomique	21
1.2 Approche géométrique	23
1.2.1 Ramification et Inertie Logarithmique	23
1.2.2 Valuation Logarithmique	25
1.2.3 Diviseurs Logarithmiques	26
1.3 Description des classes logarithmiques en termes d'idéaux	26
1.4 Le module de Kuz'min-Tate	27
1.5 Groupe des Classes Logarithmiques	27
1.5.1 Conjecture de Gross-Kuz'min	29
1.5.2 Groupe d'unités logarithmiques	29
1.6 Résultats immédiats sur le groupe de classes logarithmiques	30
1.6.1 Un théorème d'Iwasawa Logarithmique	30
2 Le groupe de classes logarithmiques le long des $\mathbb{Z}_\ell$-extensions	31
2.1 Le cas cyclotomique	32
2.1.1 Calculs Explicites	34
2.2 Le cas non-cyclotomique	36
2.2.1 Préliminaires	36
2.2.2 Théorie d'Iwasawa	38
2.3 Les paramètres structurels d'un module sur l'algèbre d'Iwasawa	44
2.3.1 Paramètres associés aux extensions cyclotomiques	46
2.3.2 Paramètres associés aux extensions non-cyclotomiques	47
2.4 Appendice : Calculs explicites des invariants $\tilde{\mu}$ et $\tilde{\lambda}$	49

2.4.1	Le cas cyclotomique	49
2.4.2	Le cas non-cyclotomique	51
3	Modules d'Iwasawa Logarithmiques pour des $\mathbb{Z}_\ell^d$-extensions	53
3.1	$\mathbb{Z}_\ell^d$ -extensions	54
3.2	Le module logarithmique	55
3.3	Les Invariants $\tilde{\mu}$ et $\tilde{\lambda}$	58
3.4	Nombres de classes logarithmiques dans les $\mathbb{Z}_\ell^d$ -extensions	61
3.4.1	Préliminaires	61
3.4.2	Plongement Cyclotomique	63
3.4.3	Modules sur l'algèbre d'Iwasawa	64
3.4.4	Structures admissibles	66
3.4.5	Le théorème principal	70
	Bibliographie	75

Introduction

Les pages qui suivent traitent de l'arithmétique logarithmique dans la théorie d'Iwasawa, c'est-à-dire de l'étude des objets logarithmiques et ses invariants, et, plus précisément de l'étude du groupe de classes logarithmiques, le long des $\mathbb{Z}_\ell^d$ -extensions de corps de nombres algébriques. L'ensemble est organisé en trois chapitres étroitement reliés.

Nous résumons ci-dessous le contenu des différents chapitres.

Le chapitre 1 (Arithmétique Logarithmique) est consacré aux invariants logarithmiques d'un corps de nombres.

Les sections 1-4 introduisent les diverses approches desquels les invariants logarithmiques ont été objet. Ces invariants ont été définis par Jaulent¹, et étudiés dans d'autres contextes par lui-même^{2 3} et ses collaborateurs Diaz y Diaz, Pauli et Soriano⁴. Ce sont les approches considérées dans la section 1, l'approche algébrique en termes de la théorie ℓ -adique de corps de classes ; et dans la section 2, l'approche géométrique, en termes des diviseurs dits logarithmiques, celles qu'on considère le plus fréquemment dans nos études ultérieures.

La section 5 unifie ces définitions. Nous montrons leur équivalence, et aussi nous nous occupons de la finitude du groupe de classes logarithmiques $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$, qui est conditionnelle à la conjecture de Gross-Kuz'min. Nous décrivons aussi le lien entre le rang du groupe des unités logarithmiques $\widetilde{\mathcal{E}}_K$ et la conjecture mentionnée.

La section 6 peut être regardée comme la première comparaison, dans ce travail, entre $\mathcal{C}\ell_K$ la ℓ -partie du groupe de classes classique et $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$ le groupe de classes logarithmiques. Nous démontrons un théorème qui établit la trivialité du groupe de classes logarithmiques dans les extensions cyclotomiques $\mathbb{Q}(\zeta_{\ell^n})$ pour un nombre premier régulier ℓ . Ce théorème est analogue à un résultat d'Iwasawa⁵ pour la ℓ -partie du groupe de classes.

1. Jean-François Jaulent. *L'arithmétique des ℓ -extensions*. Publications Mathématiques de la Faculté des Sciences de Besançon. Université de Franche-Comté, Faculté des Sciences, Besançon, 1986. Dissertation

2. Jean-François Jaulent. Classes logarithmiques des corps de nombres. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 6(2):301–325, 1994

3. Jean-François Jaulent. Sur les normes cyclotomiques et les conjectures de Leopoldt et de Gross-Kuz'min. *Annales mathématiques du Québec*, pages 1–22, 2016

4. Francisco Diaz y Diaz, Jean-François Jaulent, Sebastian Pauli, Michael Pohst, and Florence Soriano-Gafiuk. A new algorithm for the computation of logarithmic ℓ -class groups of number fields. *Experiment. Math.*, 14(1):65–74, 2005

5. Kenkichi Iwasawa. A note on class numbers of algebraic number fields. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 20:257–258, 1956

Le chapitre 2 (Le groupe $\widetilde{Cl}$ le long des $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions) est consacré à la théorie d'Iwasawa pour $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions.

La section 1 reproduit les résultats de Jaulent¹ pour l'étude du groupe de classes logarithmiques des corps K_n contenus dans K^c/K la $\mathbb{Z}_\ell$ -extension cyclotomique. Nous profitons que le calcul du groupe de classes logarithmiques a été rendu accessible par des méthodes algorithmiques⁶, et implémenté⁷ au logiciel PARI par Belabas et Jaulent, pour donner des exemples de leur calcul pour les premiers trois étages de la $\mathbb{Z}_3$ -extension cyclotomique de certains corps quadratiques.

La section 2 peut être interprétée comme un addenda historique à l'étude du groupe de classes logarithmiques dans des $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions. Nous étudions la ramification logarithmique pour des $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions en général et nous montrons sous la conjecture de Gross-Kuz'min que dans une $\mathbb{Z}_\ell$ -extension non-cyclotomique K_∞ au moins une place sauvage se ramifie logarithmiquement. Nous utilisons la théorie d'Iwasawa pour démontrer que sous la conjecture de Gross-Kuz'min l'exposant $\tilde{e}_n(K_\infty/K)$ de l'ordre $|\widetilde{Cl}_n|$ du groupe de classes logarithmiques du n -ième étage de la tour K_∞/K est donné par la formule

$$\tilde{e}_n(K_\infty/K) = \ell^n \tilde{\mu} + n\tilde{\lambda} + \tilde{\nu},$$

pour des entiers $\tilde{\mu}$, $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\nu}$ pour n suffisamment grand. Donc ceci complète l'étude du groupe de classes logarithmiques le long de $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions dans l'esprit original d'Iwasawa⁸.

La section 3 applique les résultats de la section précédente dans le cas d'une $\mathbb{Z}_\ell$ -extension non-cyclotomique d'un corps de nombres. Nous montrons, sous la conjecture de Gross-Kuz'min, et sous l'hypothèse que les groupes de décomposition attachés aux places sauvages de K ont indice fini dans K_∞/K , que les paramètres $\tilde{\rho}$, $\tilde{\mu}$ et $\tilde{\lambda}$ associés au module logarithmique et les paramètres ρ , μ et λ associés aux modules classiques satisfont les relations

$$\tilde{\rho} = \rho = 0 \quad \tilde{\mu} = \mu,$$

et $\tilde{\lambda}$, λ ne divergent que par des facteurs cyclotomiques.

Le chapitre 3 (Modules d'Iwasawa Logarithmiques pour des $\mathbb{Z}_\ell^d$ -extensions).

La section 1 expose les propriétés générales des $\mathbb{Z}_\ell^d$ -extensions, étudiées initialement par Greenberg⁹, c'est-à-dire au compositum de d $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions, en particulier, nous équipons l'ensemble des différentes $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions d'un corps de nombres d'une topologie.

La section 2 s'intéresse au groupe de Galois de la ℓ -extension maximale abélienne logarithmiquement non-ramifiée L_d du compositum K_d de d $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions d'un corps de nombres. Nous montrons, que le groupe de Galois $X = \text{Gal}(L_d/K_d)$ est un module noethérien sur l'algèbre d'Iwasawa Λ_d de $\text{Gal}(K_d/K)$. En plus, sous la conjecture de Gross-Kuzmin on démontre que X est un module de torsion.

La section 3 établit les théorèmes sur les paramètres logarithmiques $\tilde{\lambda}$ et $\tilde{\mu}$ associés aux $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions pour lesquelles les groupes de décomposition des places sauvages dans chaque extension ont ordre fini. Nous montrons, en utilisant la topologie pour l'ensemble des $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions,

6. F. Diaz y Diaz and F. Soriano. Approche algorithmique du groupe des classes logarithmiques. *J. Number Theory*, 76(1):1–15, 1999

7. Karim Belabas and Jean-François Jaulent. The logarithmic class group package in pari/gp. *Pub. Math. Besançon*, 2016

8. Kenkichi Iwasawa. On Γ -extensions of algebraic number fields. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 65:183–226, 1959

9. Ralph Greenberg. The Iwasawa invariants of Γ -extensions of a fixed number field. *Amer. J. Math.*, 95:204–214, 1973

que l'invariant $\tilde{\mu}$ est borné dans un voisinage d'une $\mathbb{Z}_\ell$ -extension K_∞ et que si $\tilde{\mu} = 0$ alors l'invariant λ est aussi borné dans un voisinage de K_∞ .

La section 4 commence par exposer brièvement la théorie des $\mathcal{S}$ -structures utilisé par Cuoco et Monsky¹⁰ sur le Λ_d -module associé à la ℓ -extension maximale abélienne non-ramifiée de K_d . Nous montrons que le module logarithmique X associé au compositum K_d de d $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions non-cyclotomiques peut être étudié avec ces méthodes. En particulier on démontre qu'il existent des entiers $\tilde{\mu}_d, \tilde{\lambda}_d$, tels que l'exposant $\tilde{e}_n(K_d/K)$ de l'ordre $|\widetilde{C\ell}_n|$ du groupe de classes logarithmiques attaché à l'étage $K_n = K_d^{\Gamma_d^{\ell^n}}$ est donné par la formule

$$\tilde{e}_n(K_d/K) = (\tilde{\mu}_d^{\ell^n} + \tilde{\lambda}_d n + O(1))\ell^{(d-1)n},$$

pour n suffisamment grand.

10. Albert A. Cuoco and Paul Monsky. Class numbers in $\mathbf{Z}_p^d$ -extensions. *Math. Ann.*, 255(2):235–258, 1981

Chapitre 1

Arithmétique Logarithmique

Il n'est pas impossible qu'un auteur soit un grand homme, mais ce ne sera pas en faisant des livres ni en vers ni en prose qu'il deviendra tel.

Jean-Jacques Rousseau

À un corps de nombres K on peut associer ses invariants arithmétiques classiques, entre autres : son anneau d'entiers $\mathcal{O}_K$, son sous-groupe d'unités E_K , son groupe de classes C_K et son nombre de classes h_K . En fixant un nombre premier ℓ , on peut définir des invariants dits logarithmiques (introduits par Jaulent dans [Jau86] et puis étudiés en détail dans [Jau94]). Ce chapitre a pour objectif d'expliquer l'information qui leur est associée. En citant Jaulent, à propos des groupes des classes logarithmiques :

«Ces groupes logarithmiques possèdent un comportement à certains égards très voisins de ceux des groupes classiques, quelques fois différents.»

Dans l'intérêt des similitudes entre les groupes classiques et les groupes logarithmiques, rappelons le résultat suivant énoncé par Serre dans son exposé Bourbaki [Ser95] sur le travail de Iwasawa.

Théorème (Iwasawa). *Soit $K_n = \mathbb{Q}(\zeta_{\ell^{n+1}})$ pour $n \geq 0$, si ℓ ne divise pas h_{K_0} alors ℓ ne divise aucun des h_{K_n} .*

Sous les mêmes hypothèses le même résultat est vrai pour le ℓ -groupe de classes logarithmiques $\widetilde{C}\ell_{K_n}$ de K_n .

Théorème (Version logarithmique). *Soit $K_n = \mathbb{Q}(\zeta_{\ell^{n+1}})$, si ℓ est un nombre premier régulier alors $\widetilde{C}\ell_{K_n}$ est trivial pour $n \geq 0$.*

La démonstration de ce résultat se déduit facilement en utilisant le résultat d'Iwasawa dans la partie droite de la suite (1.30) et du fait que ℓ est totalement ramifié dans chacun des étages.

En revanche, considérons le corps quadratique $K = \mathbb{Q}[\sqrt{67}]$: des calculs dans PARI montrent que son anneau d'entiers $\mathcal{O}_K$ est principal. Mais pour $\ell = 3$ le groupe logarithmique $\widetilde{C}\ell_K$ est isomorphe au groupe cyclique d'ordre 3.

Ces deux exemples, illustrent les phénomènes auxquels les invariants logarithmiques nous confrontent et ce chapitre en fait l'étude.

On explore les invariants logarithmiques par diverses approches : certaines plus géométriques et certaines plus algébriques. En particulier on étudie les relations entre quatre définitions du groupe de classes logarithmiques $\mathcal{CL}_K$ (Thm 1.5.1).

1.1 Théorie ℓ -adique des corps de classes

Dans cette section on rappelle les définitions et les résultats principaux de la théorie ℓ -adique du corps de classes développée par Jaulent dans [Jau86, Ch. I §1]. Comme son nom le dit, elle imite la théorie du corps de classes au sens classique en suivant l'esprit de Chevalley (cf. [Mil13, Neu86]), en remplaçant les $\mathbb{Z}$ -modules (groupes abéliens) par des $\mathbb{Z}_\ell$ -modules.

Les extensions considérées seront des pro- ℓ -extensions.

1.1.1 Le groupe des classes d'idèles généralisés

On fixe K un corps de nombres et ℓ un entier premier ; on dénote par Pl_K l'ensemble des classes d'équivalence de valeurs absolues de K . On écrit $\text{Pl}_K = \text{Pl}_K^\infty \cup \text{Pl}_K^0$ comme la réunion des places archimédiennes Pl_K^∞ et ultramétriques Pl_K^0 de K . A chaque place ultramétrique $\mathfrak{p} \in \text{Pl}_K^0$ on associe son complété $K_{\mathfrak{p}}$, qui est une extension finie de $\mathbb{Q}_{\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}}$, la norme dans $K_{\mathfrak{p}}$ induite par la norme $\mathfrak{p}$ -adique permet de choisir et fixer une uniformisante $\pi_{\mathfrak{p}}$ dans l'idéal maximal $\mathfrak{p}$ tel que un élément non-nul α dans $K_{\mathfrak{p}}$ peut s'exprimer comme $\alpha = \xi \cdot \pi_{\mathfrak{p}}^n$ pour $\xi \in \mathcal{O}_{K_{\mathfrak{p}}}^\times$ et $n \in \mathbb{Z}$. Pour une place archimédienne $\mathfrak{p} \in \text{Pl}_K^\infty$ on a deux possibilités pour les complétés $K_{\mathfrak{p}}$ soit le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ ou celui des nombres complexes $\mathbb{C}$.

Les complétés ℓ -adiques des sous-groupes multiplicatifs, sont des $\mathbb{Z}_\ell$ -modules topologiques de la forme

$$\mathcal{R}_{\mathfrak{p}} := \varprojlim_k K_{\mathfrak{p}}^\times / K_{\mathfrak{p}}^{\times \ell^k} \simeq \begin{cases} \{\pm 1\} & \text{si } \mathfrak{p} \text{ est réelle et } \ell = 2 \\ 1 & \text{dans les autres cas archimédiens} \\ \mu_{\mathfrak{p}} \pi_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{Z}_\ell} & \text{si } \mathfrak{p} \nmid \ell_\infty \\ \mathcal{U}_{\mathfrak{p}}^{(1)} \pi_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{Z}_\ell} & \text{si } \mathfrak{p} \mid \ell \end{cases} \quad (1.1)$$

Le théorème suivant démontre l'importance de la structure dans le cas ultramétrique où $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$ est le produit d'un sous-groupe d'unités $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$ et d'un $\mathbb{Z}_\ell$ -module de dimension 1 ; ce sous-groupe d'unités est composé soit par le ℓ -sous-groupe de Sylow des racines de l'unité dans $K_{\mathfrak{p}}$ pour les places étrangères à ℓ , soit par le sous-groupe des unités principales $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}^{(1)} = 1 + \mathfrak{p}$ de $K_{\mathfrak{p}}$ pour les places au-dessus de ℓ .

Théorème 1.1.1 (Thm 1.1.11 [Jau86]). *L'application d'Artin induit un isomorphisme de $\mathbb{Z}_\ell$ -modules topologiques de $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$ sur le groupe de Galois $G_{\mathfrak{p}} = \text{Gal}(K_{\mathfrak{p}}^{\text{ab}}/K_{\mathfrak{p}})$ de la pro- ℓ -extension abélienne maximale de $K_{\mathfrak{p}}$. Cet isomorphisme envoie $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$ sur le sous-groupe d'inertie $I_{\mathfrak{p}} = \text{In}(K_{\mathfrak{p}}^{\text{ab}}/K_{\mathfrak{p}})$.*

De manière similaire au groupe d'idèles défini par Chevalley, on définit le ℓ -groupe d'idèles généralisés d'un corps de nombres K comme le produit restreint des ℓ -adifiés des groupes $K_{\mathfrak{p}}^\times$.

$$\mathcal{I}_K := \prod_{\mathfrak{p} \in \text{Pl}_K}^* \mathcal{R}_{\mathfrak{p}} = \{(x_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} \mid x_{\mathfrak{p}} \in \mathcal{U}_{\mathfrak{p}} \text{ pour presque tout } \mathfrak{p} \in \text{Pl}_K^0\}, \quad (1.2)$$

le ℓ -groupe des idèles principaux est défini comme le $\mathbb{Z}_\ell$ -module topologique

$$\mathcal{R}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} K^\times. \quad (1.3)$$

L'application naturelle du ℓ -groupe des idèles principaux $\mathcal{R}_K$ dans le ℓ -groupe d'idèles généralisés $\mathcal{I}_K$ est un monomorphisme continu [Jau86, 1.1.4]. Le groupe quotient

$$\mathcal{C}_K := \mathcal{I}_K / \mathcal{R}_K \quad (1.4)$$

est un $\mathbb{Z}_\ell$ -module compact, appelé le ℓ -groupe de classes d'idèles du corps K .

Maintenant on peut énoncer le résultat principal de la théorie ℓ -adique de classes du point de vue global.

Théorème 1.1.2 (Corps de classes global, Thm. 1.1.13 [Jau86]). *Étant donné un corps de nombres K , l'application de réciprocité induit un isomorphisme topologique entre le groupe de Galois de la ℓ -extension maximale abélienne de K et le ℓ -groupe de classes d'idèles de K :*

$$G_K = \text{Gal}(K^{\text{ab}}/K) \simeq \mathcal{C}_K. \quad (1.5)$$

Dans cette correspondance, le sous-groupe de décomposition $D_{\mathfrak{p}}$ d'une place $\mathfrak{p}$ de K est l'image dans G_K du sous-module $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$ de $\mathcal{I}_K$; et son sous-groupe d'inertie $I_{\mathfrak{p}}$ est celle du sous-groupe $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$ des unités de $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$.

En résumé cette correspondance est

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Sous-modules fermés de } \mathcal{I}_K \\ \text{contenant } \mathcal{R}_K. \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{pro-}\ell\text{-extensions abéliennes} \\ \text{de } K \end{array} \right\}$$

et en particulier

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Sous-modules ouverts de } \mathcal{I}_K \\ \text{contenant } \mathcal{R}_K. \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \ell\text{-extensions abéliennes} \\ \text{de } K \end{array} \right\}$$

En plus, pour une extension L/K finie quelconque on a le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} & K^{\text{ab}} & \\ & \downarrow & \\ c_K \left(\begin{array}{c} \widehat{L} \\ \downarrow \\ K \end{array} \right. & \begin{array}{c} \widehat{L} = K^{\text{ab}} \cap L \text{ est la sous-}\ell\text{-extension maximale} \\ \text{de } L \text{ qui est abélienne sur } K, \text{ alors} \\ \text{Gal}(\widehat{L}/K) \simeq \mathcal{C}_K / N_{L/K}(\mathcal{C}_L) = \mathcal{I}_K / N_{L/K}(\mathcal{I}_L) \mathcal{R}_K. \end{array} & L \end{array}$$

Exemple 1.1.1 (Corps de Classes de Hilbert). Considérons la ℓ -extension maximale non ramifiée¹ H de K . Cette extension est fixée par l'image du groupe de normes $\mathcal{U}_K = \prod_{\mathfrak{p} \in \text{Pl}_K} \mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$ dans $\mathcal{C}_K$, c'est à dire par $\mathcal{U}_K \mathcal{R}_K / \mathcal{R}_K$.

Le groupe de Galois $\text{Gal}(H/K) = \mathcal{I}_K / \mathcal{U}_K \mathcal{R}_K$ s'identifie au ℓ -groupe fini des classes de diviseurs $\mathcal{Cl}_K$ de K , car on a

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_K / \mathcal{U}_K &= \prod_{\mathfrak{p}}^* \mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}} / \mathcal{U}_{\mathfrak{p}} \\ &= \bigoplus_{\mathfrak{p} \text{ fini}} \pi_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{Z}_\ell} \\ &= \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} \text{Id}_K \end{aligned}$$

1. Non ramifiée aux places finies.

et par passage au quotient $\text{Gal}(\mathbf{K}^{\text{nr}}/\mathbf{K}) \simeq \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} \text{Cl}_{\mathbf{K}} = \text{Cl}_{\mathbf{K}}$, le ℓ -groupe des classes d'idéaux (au sens ordinaire) du corps $\mathbf{K}$.

◆

1.1.2 Valeurs absolues ℓ -adiques

La décomposition de $\mathbb{Z}_\ell^\times$ comme produit du groupe des $\ell-1$ racines de l'unité par le groupe des unités principales induit des projections sur ce dernier, celles ci définissent les valeurs absolues ℓ -adiques comme les applications de $\mathbf{K}_{\mathbf{p}}^\times$ à valeurs dans le sous-groupe des unités principales $\mathcal{U}_\ell^{(1)}$ de $\mathbb{Z}_\ell$ pour chaque place $\mathbf{p}$ de $\text{Pl}_{\mathbf{K}}$:

$$|x_{\mathbf{p}}|_{\mathbf{p}} := \begin{cases} 1, & \text{si } \mathbf{p} \text{ est complexe;} \\ \langle \text{sg}(x_{\mathbf{p}}) \rangle, & \text{si } \mathbf{p} \text{ est réelle;} \\ \langle N_{\mathbf{p}^{-v_{\mathbf{p}}}(x)} \rangle, & \text{si } \mathbf{p} \nmid \ell; \\ \langle N_{\mathbf{K}_{\mathbf{p}}/\mathbb{Q}_{\mathbf{p}}}(x) N_{\mathbf{p}^{-v_{\mathbf{p}}}(x)} \rangle, & \text{si } \mathbf{p} | \ell. \end{cases} \quad (1.6)$$

Ces $\mathbb{Z}_\ell$ -morphismes continus se propagent sans difficulté aux complétés ℓ -adiques $\mathcal{R}_{\mathbf{p}}$. Les nouvelles valuations $v_{\mathbf{p}}$ sont définies simplement comme la valeur dans $\mathbb{Z}_\ell$ de l'exposant de l'uniformisante. On note le noyau de chacune de ces applications

$$\tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{p}} := \ker(\mathcal{R}_{\mathbf{p}} \xrightarrow{|\cdot|_{\mathbf{p}}} \mathcal{U}_\ell^{(1)}), \quad (1.7)$$

notons que l'on a : $\tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{p}} = \mathcal{U}_{\mathbf{p}}$ si $\mathbf{p}$ ne divise pas ℓ ; tandis que pour $\mathbf{p}$ divisant ℓ , on a :

$$\tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{p}} = \{x_{\mathbf{p}} \in \mathcal{R}_{\mathbf{p}} \mid \text{Log}_\ell N_{\mathbf{K}_{\mathbf{p}}/\mathbb{Q}_\ell}(x_{\mathbf{p}}) = 0\},$$

où Log_ℓ désigne le Logarithme d'Iwasawa. Le noyau $\tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{p}}$ s'identifie au sous-groupe $\text{Gal}(\mathbf{K}_{\mathbf{p}}^{\text{ab}}/\mathbf{K}_{\mathbf{p}}^c)$ associé à la $\mathbb{Z}_\ell$ -extension cyclotomique de $\mathbf{K}_{\mathbf{p}}$; ceci explique que $\tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{p}}$ soit nommé le groupe des normes cyclotomiques dans $\mathcal{R}_{\mathbf{p}}$.

Le produit

$$\tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{K}} = \prod_{\mathbf{p} \in \text{Pl}_{\mathbf{K}}} \tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{p}}, \quad (1.8)$$

est appelé le groupe des normes cyclotomiques locales dans $\mathcal{J}_{\mathbf{K}}$.

Proposition 1.1.1. *Soit $\mathbf{K}_{\mathbf{p}}/\mathbb{Q}_{\mathbf{p}}$ une extension finie. Pour tout $x \in \mathcal{R}_{\mathbf{p}}$ on a l'égalité suivante :*

$$|x|_{\mathbf{p}} = |N_{\mathbf{K}_{\mathbf{p}}/\mathbb{Q}_{\mathbf{p}}}(x)|_{\mathbf{p}}, \quad (1.9)$$

i.e. la valeur absolue ℓ -adique ne dépend pas de l'extension dans laquelle on la calcule.

En particulier le groupe $\tilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}$ est l'image réciproque par la norme arithmétique locale $N_{\mathbf{L}_{\mathfrak{p}}/\mathbf{K}_{\mathbf{p}}}$ de $\tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{p}}$.

La Proposition 1.1.1 illustre qu'on n'a pas à craindre que la formule du produit ne soit plus vraie pour les valeurs absolues ℓ -adiques.

Théorème 1.1.3 (Formule du produit, Prop. 1.1.8 [Jau86]). *L'application*

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\mathbf{K}} &\longrightarrow \mathcal{U}_\ell^{(1)} \subset \mathbb{Z}_\ell \\ \xi = (x_{\mathbf{p}})_{\mathbf{p}} &\mapsto \|\xi\| = \prod_{\mathbf{p} \in \text{Pl}_{\mathbf{K}}} |x_{\mathbf{p}}|_{\mathbf{p}} \end{aligned}$$

est un $\mathbb{Z}_\ell$ -morphisme continu. Son noyau $\tilde{\mathcal{J}}_K$ est un sous-module fermé de $\mathcal{J}_K$ qui contient le sous-groupe d'idèles principaux $\mathcal{R}_K$ et qui contient aussi le groupe des normes cyclotomiques locales $\tilde{\mathcal{U}}_K$.

Ainsi, le noyau $\tilde{\mathcal{J}}_K$ de la formule du produit pour les valeurs absolues ℓ -adiques sur K est l'image réciproque par la norme arithmétique $N_{K/\mathbb{Q}}$ du même noyau $\tilde{\mathcal{J}}_{\mathbb{Q}}$ pour le corps des rationnels $\mathbb{Q}$.

1.1.3 Extensions cyclotomique et localement cyclotomique

On définit la $\mathbb{Z}_\ell$ -extension cyclotomique K^c de K comme l'extension fixée par l'image de $\tilde{\mathcal{J}}_K$ dans $\mathbb{C}_K$. La théorie ℓ -adique interprète $\mathcal{J}_K/\mathcal{R}_K$ comme le groupe de Galois $\text{Gal}(K^{\text{ab}}/K^c)$.

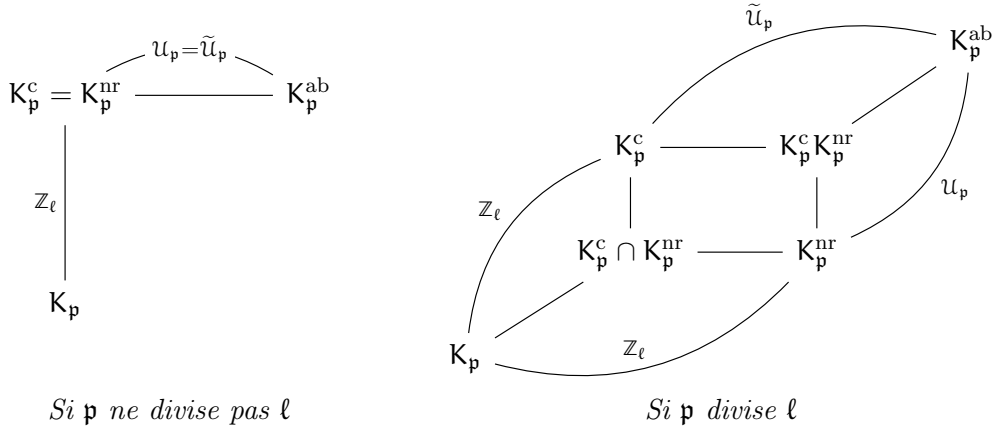
De manière similaire, on définit la pro- ℓ -extension abélienne localement cyclotomique maximale K^{lc} comme la plus grande pro- ℓ -extension qui est abélienne sur K et complètement décomposée sur K^c en chacune de ses places.²

L'extension cyclotomique K^c est contenue dans l'extension $K(\zeta_{\ell^\infty})$ de K obtenue en ajoutant toutes les racines ℓ^n -ièmes de l'unité ζ_{ℓ^n} pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque l'extension localement cyclotomique K^{lc} est totalement décomposée sur K^c , on a

$$(K^{\text{lc}})_p = K_p^c,$$

pour toute place p dans K^{lc} . Donc on obtient que $(K^{\text{lc}})_p \subset K_p(\zeta_{\ell^\infty})$.

Si p est ultramétrique, on a deux scénarios décrits par les diagrammes suivants



Notons que dans le cas sauvage il peut arriver que quelques étages de la tour cyclotomique locale soient non-ramifiés. Trois exemples de cela sont donnés ci-dessous (voir [Was97, Ex. 13.3 & 13.4]).

Exemple 1.1.2. (i) Soit K un corps de nombres ne contenant pas $\sqrt{2}$. La $\mathbb{Z}_2$ -extension cyclotomique de $\mathbb{Q}$ étant totalement réelle, elle a pour premier étage le corps de nombres $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, c'est ainsi que $K(\sqrt{2})$ est par composition le premier étage de la tour cyclotomique K_∞/K .

Si l'on fait $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-6})$, son discriminant $\Delta(K) = -24$ indique que les premiers qui ramifient

2. Cette définition est en accord avec la définition initiale [Jau86, Thm. 1.1.29] comme la ℓ -extension abélienne maximale de K , qui est non ramifiée et ℓ -décomposée sur l'extension cyclotomique K^c : Prenant une place $p \nmid \ell$, on a l'inclusion $D_p(K^{\text{ab}}/K^{\text{lc}}) \subseteq D_p(K^{\text{ab}}/K^c)$ qui est en fait une égalité puisqu'un élément $(x_p)_p \in \mathcal{R}_p \cap \tilde{\mathcal{J}}_K$ est tel que $x_i = 1$ pour tout $i \neq p$ et donc $|x_p|_p = 1$, de sorte qu'il appartient à $\mathcal{U}_p$, donc vérifie $(x_p)_p \in \mathcal{R}_p \cap \tilde{\mathcal{U}}_K \mathcal{R}_K$.

sont 2 et 3, donc soient $\mathfrak{p}_2 = (2, \sqrt{-6})$ et $\mathfrak{p}_3 = (3, \sqrt{-6})$ les premiers au-dessus de 2 et 3 respectivement avec indices de ramification $e(\mathfrak{p}_2|2) = 2$ et $e(\mathfrak{p}_3|3) = 2$.

Le premier étage de la $\mathbb{Z}_2$ -extension cyclotomique de K est donc $\mathbb{Q}(\sqrt{-6}, \sqrt{2})$, par multiplicité des tours on a deux options pour $\mathfrak{p}_2$ dans $K(\sqrt{2})$: soit il se ramifie complètement soit il est inerte. Il ne peut pas se ramifier, car cela impliquerait que 2 est complètement ramifié dans chaque sous-extension quadratique de $K(\sqrt{2})$ ce qui n'est pas le cas pour $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ où il est inerte. Donc $e(\mathfrak{p}_2|\mathfrak{p}_2) = 1$ et on obtient le résultat cherché en localisant.

(ii) Soient ψ_9 et χ_7 des caractères de Dirichlet d'ordre 3 et de conducteurs 9 et 7 respectivement. Comme p.p.c.m.(7, 9) = 63, le caractère produit $\psi_9\chi_7$ est associé à un sous-corps de $\mathbb{Q}(\zeta_{63})$; et, puisqu'on a $\psi_9\chi_7(-1) = 1$, le sous-corps qui lui est associé est réel ; de plus par le théorème des restes chinois $|\ker \psi_9\chi_7| = 12$; il en résulte que le sous-corps K_0 associé à $\psi_9\chi_7$ est de degré 3 sur $\mathbb{Q}$. L'indice de ramification dans K_0 est 1 pour tous les nombres premiers sauf 3, 7 pour lesquels est 3 [Was97, Thm. 3.7].

Or, considérons le groupe des caractères de Dirichlet $\langle \psi_9, \chi_7 \rangle$ engendré par ψ_9 et χ_7 . L'intersection des noyaux des caractères dans $\langle \psi_9, \chi_7 \rangle$ est un sous-groupe de $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{63})/\mathbb{Q})$ isomorphe à $C_2 \times C_2$, d'où il suit que son corps fixé K_1 est réel de degré 9 sur $\mathbb{Q}$. De plus on a :

$$\langle \psi_9\chi_7 \rangle \subset \langle \psi_9, \chi_7 \rangle \subset \langle \chi_7\psi_9, \mathbb{Q}(\zeta_9) \rangle,$$

où $X(\mathbb{Q}(\zeta_9))$ est le groupe de caractères de $\mathbb{Q}(\zeta_9)$, qui contient ψ_9 . En termes de corps de nombres

$$K_0 \subset K_1 \subset K_0(\zeta_9),$$

c'est à dire K_1 est bien le premier étage de la $\mathbb{Z}_3$ -tour cyclotomique de K_0 .

Enfin l'indice de ramification de $\mathfrak{p}$ en K_1 coïncide avec ceux trouvés avant, ce qui confirme que K_1/K_0 est non ramifiée.

(iii) Ici, on illustre la situation générale en termes strictement algébriques. Si l'on prend une $\mathbb{Z}_\ell^2$ -extension Z de K de groupe de Galois $G = \langle \sigma, \gamma \rangle \simeq \mathbb{Z}_\ell^2$. On s'intéresse aux deux sous-extensions E_1 et E_2 de groupe $\mathbb{Z}_\ell$ fixées respectivement par $\langle \sigma^\ell \gamma \rangle$ et $\langle \sigma^{\ell^2} \gamma \rangle$.

L'intersection est alors fixée par le sous-groupe

$$\langle \sigma^\ell \gamma, \sigma^{\ell^2} \gamma \rangle = \langle \sigma^\ell, \gamma \rangle$$

qui définit un quotient $\frac{\langle \sigma, \gamma \rangle}{\langle \sigma^\ell, \gamma \rangle} \simeq \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$. On obtient donc le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} & & E_1 & \xrightarrow{\langle \sigma^\ell \gamma \rangle} & Z \\ & & \downarrow & & \downarrow \langle \sigma^{\ell^2} \gamma \rangle \\ & & & & E_2 \\ & \nearrow \ell & & & \\ K & & & & \end{array}$$

◆

L'extension localement cyclotomique est fixée par l'image de $\tilde{U}_K$ dans $\mathcal{C}_K$. La théorie ℓ -adique interprète le sous-groupe $\tilde{U}_K \mathcal{R}_K / \mathcal{R}_K$ comme le groupe de Galois $\text{Gal}(K^{\text{ab}}/K^{\text{lc}})$, nous verrons que ce groupe est isomorphe à $\tilde{U}_K / \tilde{E}_K$ où $\tilde{E}_K = \tilde{U}_K \cap \mathcal{R}_K$ est le ℓ -groupe des unités logarithmiques globales, c'est-à-dire des éléments de $\mathcal{R}_K$ qui sont partout des unités logarithmiques (voir Définition 1.5.1 pour plus de détails).

On déduit que

$$\mathrm{Gal}(\mathbf{K}^{\mathrm{lc}}/\mathbf{K}) \simeq \mathcal{J}_{\mathbf{K}}/\tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{K}}\mathcal{R}_{\mathbf{K}} \quad \text{et} \quad \mathrm{Gal}(\mathbf{K}^c/\mathbf{K}) \simeq \mathcal{J}_{\mathbf{K}}/\tilde{\mathcal{J}}_{\mathbf{K}},$$

la dénomination *cyclotomique* résulte du fait que pour ℓ impair³ et pour $\mathbf{K} = \mathbb{Q}$ on a $\mathcal{J}_{\mathbb{Q}}/\tilde{\mathcal{J}}_{\mathbb{Q}} = (1 + \ell\mathbb{Z}_{\ell})$ et donc $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^c/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}_{\ell}$, le cas général résulte de l'identité de composition $\mathbf{K}^c = \mathbf{K}\mathbb{Q}^c$. De sa part, l'extension *localement cyclotomique* porte son nom puisque en prenant une place $\mathfrak{p}$ ultramétrique, le corps fixe de $\tilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}$ est précisément l'extension cyclotomique locale $\mathbf{K}_{\mathfrak{p}}^c$ de $\mathbf{K}_{\mathfrak{p}}$.

Définition 1.1.1. On définit le ℓ -groupe des classes logarithmiques de $\mathbf{K}$ comme le groupe de Galois relatif

$$\tilde{\mathcal{C}}\ell_{\mathbf{K}} := \mathrm{Gal}(\mathbf{K}^{\mathrm{lc}}/\mathbf{K}^c), \quad (1.10)$$

qui est interprété selon la théorie ℓ -adique de corps de classes comme le quotient $\tilde{\mathcal{J}}_{\mathbf{K}}/\tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{K}}\mathcal{R}_{\mathbf{K}}$.

Le groupe de classes logarithmiques mesure l'écart d'une ℓ -extension à plongement près dans l'extension cyclotomique, tel que illustré dans le diagramme :

$$\begin{array}{c} \mathbf{K}^{\mathrm{ab}} \\ \left| \right) \tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{K}}/\tilde{\mathcal{E}}_{\mathbf{K}} \\ \mathbf{K}^{\mathrm{lc}} \\ \left| \right) \tilde{\mathcal{C}}\ell_{\mathbf{K}} \\ \mathbf{K}^c \\ \left| \right) \mathbb{Z}_{\ell} \\ \mathbf{K} \end{array}$$

Dans celui-ci le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbf{K}^{\mathrm{ab}}/\mathbf{K}^{\mathrm{lc}})$ s'identifie au quotient du groupe des unités logarithmiques locales et le sous-groupe des unités logarithmiques (voir Déf. 1.5.1).

1.2 Approche géométrique

Dans cette section on va définir les indices et les degrés absolus et relatifs de ramification et d'inertie logarithmiques. On s'en servira pour définir la valuation logarithmique : grosso modo elle nous permet d'étendre les valeurs absolues ℓ -adiques à tout le groupe $\mathbb{Z}_{\ell}$ en passant par le logarithme d'Iwasawa et une normalisation ad-hoc. Enfin, on donnera une description géométrique du groupe des classes logarithmiques à l'aide des diviseurs logarithmiques.

1.2.1 Ramification et Inertie Logarithmique

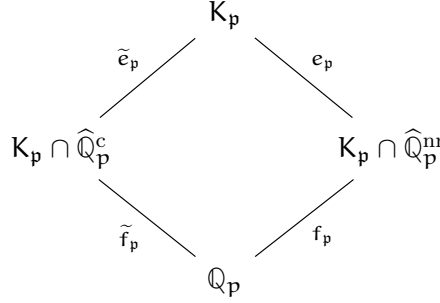
Soit $\mathbf{K}$ un corps de nombres, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Pl}_{\mathbf{K}}^0$ une place ultramétrique au-dessus de $\mathfrak{p}$ et $\mathbf{K}_{\mathfrak{p}}$ son complété. On dénote $\widehat{\mathbb{Q}}_{\mathfrak{p}}^c$ la $\widehat{\mathbb{Z}}$ -extension cyclotomique de $\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$, c'est-à-dire la composée des $\mathbb{Z}_q$ -extensions cyclotomiques de $\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$ pour tous les premiers q .

3. Dans le cas $\ell = 2$, le groupe se décompose comme $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$; c'est aussi le cas si $\mathbf{K}$ ne contient pas i .

Définition 1.2.1. Soit K_p le complété de K dans la place p . Nous disons que :

- (i) $\tilde{e}_p = [K_p : K_p \cap \widehat{\mathbb{Q}}_p^c]$ est l'indice absolu de ramification logarithmique de K_p ;
- (ii) $\tilde{f}_p = [K_p \cap \widehat{\mathbb{Q}}_p^c : \mathbb{Q}_p]$ est son degré d'inertie logarithmique.

Le diagramme suivant illustre la situation :



Dans celui-ci $\widehat{\mathbb{Q}}_p^{nr}$ désigne la $\widehat{\mathbb{Z}}$ -extension non-ramifiée de $\mathbb{Q}_p$. On voit que $[K_p : \mathbb{Q}_p] = e_p f_p = \tilde{e}_p \tilde{f}_p$. La définition des indices $\tilde{e}_p$ et $\tilde{f}_p$ dépend seulement de la place p .

L'indice de ramification mesure l'écart à plongement près du complété K_p dans la $\widehat{\mathbb{Z}}$ -extension cyclotomique de $\mathbb{Q}_p$. Observons que si p est non ramifié au sens logarithmique, K_p est le composé des m_q étages des $\mathbb{Z}_q$ -extensions cyclotomiques de $\mathbb{Q}_p$ pour les nombres premiers q divisant le degré d'inertie logarithmique $\tilde{f}_p$. Ainsi, puisqu'on a $\mathbb{Q}_q^c = \mathbb{Q}_q^{nr}$ pour tout $q \neq p$ (1.1.3), on a les égalités suivantes :

$$v_q(e_p) = v_q(\tilde{e}_p) \quad \text{et} \quad v_q(f_p) = v_q(\tilde{f}_p); \quad (1.11)$$

en particulier ils coïncident dès que p est étranger au degré de l'extension, c'est à dire $\tilde{e}_p = e_p$ et $\tilde{f}_p = f_p$ si $p \nmid [K_p : \mathbb{Q}_p]$.

On définit le quotient

$$\lambda_p := \frac{f_p}{\tilde{f}_p} = \frac{\tilde{e}_p}{e_p}, \quad (1.12)$$

il mesure une certaine divergence que dans notre cas se manifeste juste aux places au-dessus de ℓ , puisqu'on considère que des ℓ -extensions.

Définition 1.2.2. Si $L_{\mathfrak{P}}$ est une extension finie de K_p , on définit :

- (i) L'indice de ramification relatif $\tilde{e}_{L_{\mathfrak{P}}/K_p} = [L_{\mathfrak{P}} : L_{\mathfrak{P}} \cap \widehat{\mathbb{Q}}_p^c K_p]$;
- (ii) et le degré d'inertie relatif $\tilde{f}_{L_{\mathfrak{P}}/K_p} = [L_{\mathfrak{P}} \cap \widehat{\mathbb{Q}}_p^c K_p : K_p]$.

Les invariants relatifs étant définis, les formules de transition

$$\tilde{e}_{\mathfrak{P}} = \tilde{e}_{L_{\mathfrak{P}}/K_p} \tilde{e}_p \quad \text{et} \quad \tilde{f}_{\mathfrak{P}} = \tilde{f}_{L_{\mathfrak{P}}/K_p} \tilde{f}_p \quad (1.13)$$

restent valables [Jau94, §1]. On a le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
& & & & L_{\mathfrak{P}} \\
& & & \nearrow \tilde{e}_{\mathfrak{P}} & \downarrow \tilde{e}_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}} \\
& & L_{\mathfrak{P}} \cap \widehat{\mathbb{Q}}_{\mathfrak{p}}^c & \xrightarrow{\tilde{e}_{\mathfrak{p}}} & L_{\mathfrak{P}} \cap \widehat{K}_{\mathfrak{p}}^c \\
& \nearrow \tilde{f}_{\mathfrak{P}} & \downarrow \tilde{f}_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}} & & \downarrow \tilde{f}_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}} \\
\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}} & \xrightarrow{\tilde{f}_{\mathfrak{p}}} & K_{\mathfrak{p}} \cap \widehat{\mathbb{Q}}_{\mathfrak{p}}^c & \xrightarrow{\tilde{e}_{\mathfrak{p}}} & K_{\mathfrak{p}}
\end{array}$$

Définition 1.2.3. Soit L/K une extension finie de corps de nombres, $\mathfrak{P}$ une place de L au-dessus de $\mathfrak{p}$. On dit que L/K est logarithmiquement non ramifiée en $\mathfrak{p}$ lorsque $\tilde{e}_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}} = 1$, c'est à dire si $L_{\mathfrak{P}}$ est contenu dans le composé des extensions cyclotomiques $\widehat{K}_{\mathfrak{p}}^c$ de $K_{\mathfrak{p}}$.

1.2.2 Valuation Logarithmique

On définit le degré ℓ -adique⁴ d'un nombre premier $\mathfrak{p}$ comme

$$\deg_{\ell}(\mathfrak{p}) = \begin{cases} \text{Log}_{\ell}(\mathfrak{p}) & \text{si } \mathfrak{p} \neq \ell, \\ \text{Log}_{\ell}(1 + \ell) & \text{si } \mathfrak{p} = \ell; \end{cases} \quad (1.14)$$

celle-ci peut être étendue pour une place $\mathfrak{p} \in \text{Pl}_K$ au-dessus de $\mathfrak{p}$ par la formule

$$\deg_{\ell}(\mathfrak{p}) = \tilde{f}_{\mathfrak{p}} \deg_{\ell}(\mathfrak{p}). \quad (1.15)$$

Dans tous les cas l'application degré prend des valeurs dans $\ell\mathbb{Z}_{\ell}$.

Définition 1.2.4. L'application

$$\tilde{\nu}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{x}) := -\frac{\text{Log}_{\ell} |\mathfrak{x}|_{\mathfrak{p}}}{\deg_{\ell}(\mathfrak{p})} = \frac{\text{Log}_{\ell} N_{K_{\mathfrak{p}}/\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}}(\mathfrak{x})}{\deg_{\ell}(\mathfrak{p})}, \quad (1.16)$$

définie sur $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$, est la ℓ -valuation logarithmique attachée à $\mathfrak{p}$.

Pour $\mathfrak{x} \in \mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$ la quantité $\tilde{\nu}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{x})$ est indépendante de l'extension finie de $\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$ dans laquelle on la calcule. En plus, $\tilde{\nu}_{\mathfrak{p}}$ est un $\mathbb{Z}_{\ell}$ -épimorphisme sur le groupe additif $\mathbb{Z}_{\ell}$, qui a pour noyau le sous-module des normes cyclotomiques $\tilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}$. Pour $\mathfrak{p} \nmid \ell$, la ℓ -valuation logarithmique $\tilde{\nu}_{\mathfrak{p}}$ est proportionnelle à la valuation ordinaire $\nu_{\mathfrak{p}}$:

$$\tilde{\nu}_{\mathfrak{p}} = \lambda_{\mathfrak{p}} \nu_{\mathfrak{p}} = [K_{\mathfrak{p}} \cap \widehat{\mathbb{Q}}_{\mathfrak{p}}^{\text{nr}} : K_{\mathfrak{p}} \cap \widehat{\mathbb{Q}}_{\mathfrak{p}}^c] \nu_{\mathfrak{p}}, \quad (1.17)$$

où $\lambda_{\mathfrak{p}}$ est tel que définie en (1.12), le quotient $\lambda_{\mathfrak{p}}$ est une unité ℓ -adique égale à 1 pour presque tout $\mathfrak{p}$, ceci étant une conséquence de (1.11).

4. Cette définition motivée par des considérations computationnelles se révèle très pratique mais différente à celle donné dans [Jau94, Def. 1.1]. Cela ne change rien aux propriétés de la valuation logarithmique.

1.2.3 Diviseurs Logarithmiques

Classiquement le groupe de diviseurs D_K d'un corps de nombres K est le groupe abélien construit sur les places de K : les places finies étant libres (et indépendantes), les places complexes étant considérées comme triviales et les places réelles sont regardées comme d'ordre 2 ; le groupe D_K est ainsi le produit de r copies de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et du groupe I_K des idéaux fractionnaires de K . Le sous-groupe de diviseurs principaux P_K est l'image canonique de $K^\times$ dans D_K . Le quotient $Cl_K = D_K/P_K$ est un groupe fini appelé le groupe de classes de diviseurs [Jau86, Prop. III.1.2.], qui s'identifie au groupe des classes d'idéaux au sens restreint.

En remplaçant la $\mathbb{Z}$ -structure par la $\mathbb{Z}_\ell$ -structure on obtient le $\mathbb{Z}_\ell$ -module libre construit sur les places finies de K :

$$\mathcal{D}l_K = \bigoplus_{\mathfrak{p} \in Pl_K^0} \nu_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}. \quad (1.18)$$

On appelle ce $\mathbb{Z}_\ell$ -module le ℓ -groupe des diviseurs logarithmiques. L'application degré

$$\begin{aligned} \deg_K : \mathcal{D}l_K &\longrightarrow \mathbb{Z}_\ell \\ \delta = \sum_{\mathfrak{p} \in Pl_K^0} \nu_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p} &\mapsto \deg_K \delta = \sum \nu_{\mathfrak{p}} \deg_\ell(\mathfrak{p}). \end{aligned} \quad (1.19)$$

a pour noyau le sous-module $\widetilde{\mathcal{D}l}_K$ de $\mathcal{D}l_K$ formé des diviseurs logarithmiques de degré nul.

De manière analogue au cas classique on peut définir des diviseurs principaux en remplaçant $K^\times$ par le groupe d'idèles principaux $\mathcal{R}_K$ et les valuations par les valuations logarithmiques : l'application $\mathbb{Z}_\ell$ -linéaire à valeurs dans $\mathcal{D}l_K$

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{div}}_K : \mathcal{R}_K &\longrightarrow \mathcal{D}l_K \\ x &\mapsto \sum_{\mathfrak{p} \in Pl_K^0} \widetilde{\nu}_{\mathfrak{p}}(x) \mathfrak{p}, \end{aligned} \quad (1.20)$$

envoie $\mathcal{R}_K$ sur un sous-module $\mathcal{P}l_K = \widetilde{\mathcal{P}l}_K$ du groupe $\widetilde{\mathcal{D}l}_K$ des diviseurs logarithmiques de degré nul [Jau94, Prop. & Def. 2.2].

Définition 1.2.5. Nous disons que le quotient

$$\widetilde{Cl}_K := \widetilde{\mathcal{D}l}_K / \widetilde{\mathcal{P}l}_K \quad (1.21)$$

est le ℓ -groupe des classes logarithmiques du corps K .

1.3 Description des classes logarithmiques en termes d'idéaux

Puisque pour une place $\mathfrak{p} \nmid \ell$ on a que les valuations classique et logarithmique sont proportionnelles à une constante $\lambda_{\mathfrak{p}}$ près, tout ℓ -diviseur δ provient d'un ℓ -idéal $\mathfrak{a}$ par la formule

$$\mathfrak{a} = \prod_{\mathfrak{p} \nmid \ell} \mathfrak{p}^{\alpha_{\mathfrak{p}}} \mapsto \delta_K(\mathfrak{a}) = \sum_{\mathfrak{p} \nmid \ell} \lambda_{\mathfrak{p}} \alpha_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}, \quad (1.22)$$

ceci donne une description des classes logarithmiques en termes d'idéaux .

Soit

$$\mathcal{I}d_K = \{ \mathfrak{a} = \prod_{\mathfrak{p} \nmid \ell} \mathfrak{p}^{\alpha_{\mathfrak{p}}} \} \quad (1.23)$$

le groupe des ℓ -idéaux, i.e. des idéaux étrangers à ℓ . Notons

$$\widetilde{\mathcal{I}d_K} = \{\mathfrak{a} \in \mathcal{I}d_K \mid \deg_K \delta_K(\mathfrak{a}) = 0\} \quad (1.24)$$

le sous-groupe des ℓ -idéaux de degré 0, et

$$\widetilde{\mathcal{P}r_K} = \left\{ \prod_{\mathfrak{p} \nmid \ell} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a})} \mid \widetilde{v}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) = 0 \quad \forall \mathfrak{p} \mid \ell \right\} \quad (1.25)$$

le sous-groupe des ℓ -idéaux principaux engendré par les idéles principaux $\mathfrak{a}$ dont la valuation logarithmique est nulle aux places au-dessus de ℓ .

Définition 1.3.1. Le quotient

$$\widetilde{\mathcal{C}l_K} := \widetilde{\mathcal{I}d_K} / \widetilde{\mathcal{P}r_K} \quad (1.26)$$

est le ℓ -groupe des classes logarithmiques du corps K .

1.4 Le module de Kuz'min-Tate

Dans cette section nous allons donner, à l'aide de la théorie des genres, une autre définition du ℓ -groupe des classes logarithmiques [Jau16c].

Définition 1.4.1. Nous appelons module de Kuz'min-Tate d'un corps de nombres K le groupe de Galois $\mathcal{T}_K = \text{Gal}(K_{\infty}^{\text{cd}}/K_{\infty})$ de la pro- ℓ -extension abélienne maximale de la $\mathbb{Z}_{\ell}$ -extension cyclotomique K_{∞} de K qui est complètement décomposée en toutes les places, groupe que la Théorie de corps de classes identifie à la limite projective pour les applications normes $\varprojlim \mathcal{C}l'_{K_n}$ des ℓ -groupes de ℓ -classes attaché aux étages finis K_n de la tour K_{∞}/K .

Le module de Kuz'min-Tate admet une action induite de l'action de $\Gamma = \text{Gal}(K_{\infty}/K) \simeq \mathbb{Z}_{\ell}$ sur les étages K_n de la tour cyclotomique. Cette action se propage aux ℓ -groupes de classes $\mathcal{C}l_{K_n}$, et donc, au quotient $\mathcal{C}l'_{K_n} = \mathcal{C}l_{K_n} / \mathcal{C}l_{K_n}(\ell)$.

Définition 1.4.2. On définit le quotient des genres

$$\widetilde{\mathcal{C}l_K} := {}_{\Gamma}\mathcal{T}_K = \mathcal{T}_K / \mathcal{T}_K^{(\gamma-1)} \quad (1.27)$$

comme le ℓ -groupe des classes logarithmiques du corps K .

Notons que $\mathcal{T}_K^{(\gamma-1)}$ est l'image de $\mathcal{T}_K$ par l'action d'un pro-générateur $\gamma - 1$ de Γ .

1.5 Groupe des Classes Logarithmiques

Dans cette section on rappelle les quatre définitions (1.1.1), (1.2.5), (1.3.1) et (1.4.2) pour le ℓ -groupe des classes logarithmiques données dans les sections précédentes et on démontre leur équivalence.

Soit K un corps de nombres et ℓ un nombre premier, on a défini le ℓ -groupe des classes logarithmiques avec quatre approches différentes :

(i) **Théorie ℓ -adique de corps de classes**

$$\widetilde{\mathcal{C}l_K} := \text{Gal}(K^{\text{lc}}/K^c)$$

(ii) Géométrie

$$\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K := \widetilde{\mathcal{D}\ell}_K / \widetilde{\mathcal{P}\ell}_K$$

(iii) En termes d'idéaux

$$\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K := \widetilde{\mathcal{I}\mathcal{d}}_K / \widetilde{\mathcal{P}\mathcal{r}}_K$$

(iv) En termes de genres

$$\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K := \mathcal{T}_K / \mathcal{T}_K^{(\gamma-1)}$$

Théorème 1.5.1 (Equivalence). *Les définitions ci-dessus du groupe de classes logarithmiques $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$ d'un corps de nombres K sont équivalentes.*

Avant de donner la preuve, rappelons le résultat suivant connu comme le Théorème d'approximation⁵ :

Lemme 1.5.1 (Artin-Whaples). *Soient $|\cdot|_{\mathfrak{p}_1}, \dots, |\cdot|_{\mathfrak{p}_n}$ des valuations non-triviales d'un corps de nombres K . Pour chaque n soit $K_{\mathfrak{p}_n}$ le complété de K à la place $\mathfrak{p}_n$. Soit Δ l'image de K dans le produit $\Pi = \prod_{1 \leq i \leq n} K_{\mathfrak{p}_i}$ avec la topologie produit. Alors Δ est dense dans Π .*

La démonstration de ce résultat classique peut être consultée dans [Cas67, §6]. Or, une fois rappelé cet important résultat on revient à la preuve des équivalences.

Preuve du théorème d'équivalence : (i) $\Leftrightarrow$ (ii) Par la théorie ℓ -adique de corps de classes le groupe $\text{Gal}(K^{\text{lc}}/K^c)$ s'identifie au quotient $\widetilde{\mathcal{I}}_K / \widetilde{\mathcal{U}}_K \mathcal{R}_K$. L'application $\widetilde{\text{div}}_K$ induite au noyau de la formule du produit $\widetilde{\mathcal{I}}_K$ associe à un élément $(x_p)_p \in \widetilde{\mathcal{I}}_K$ un diviseur $\sum \widetilde{v}_p(x_p) \mathfrak{p}$ de degré nul, elle est clairement surjective et le noyau est le groupe des normes cyclotomiques locales $\widetilde{\mathcal{U}}_K$. Donc le quotient $\widetilde{\mathcal{I}}_K / \widetilde{\mathcal{U}}_K$ s'identifie au ℓ -groupe $\widetilde{\mathcal{D}\ell}_K$ des diviseurs logarithmiques de degré nul. Un raisonnement similaire identifie les quotients $\widetilde{\mathcal{I}}_K / \widetilde{\mathcal{U}}_K \mathcal{R}_K$ et $\widetilde{\mathcal{D}\ell}_K / \widetilde{\mathcal{P}\ell}_K$.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) D'abord notons que les $\mathbb{Z}_\ell$ -modules $\mathcal{I}_K / \widetilde{\mathcal{U}}_K$ et $\mathcal{D}\ell_K$ s'identifient, ainsi $\mathcal{I}_K / \widetilde{\mathcal{U}}_K \mathcal{R}_K$ et $\mathcal{D}\ell_K / \mathcal{P}\ell_K$. Par le théorème d'approximation toute classe dans $\mathcal{I}_K / \widetilde{\mathcal{U}}_K \mathcal{R}_K$ peut être représentée par un idéal à cordonnées triviales aux places ℓ -adiques :

$$\begin{array}{ccc} \prod_{\mathfrak{p} \nmid \ell} \mathcal{R}_{\mathfrak{p}} \simeq \mathcal{I}_K / \prod_{\mathfrak{p} \mid \ell} \mathcal{R}_{\mathfrak{p}} & \longrightarrow & \mathcal{I}_K / \widetilde{\mathcal{U}}_K \mathcal{R}_K \\ \parallel & & \parallel \\ \mathcal{D}\ell_K / \mathcal{D}\ell_K(\ell) & \longrightarrow & \mathcal{D}\ell_K / \mathcal{P}\ell_K \end{array}$$

On en déduit que l'application (1.22) donne une application surjective

$$\phi_K : \widetilde{\mathcal{I}\mathcal{d}}_K \longrightarrow \widetilde{\mathcal{C}\ell}_K.$$

Le noyau de cette application est le sous-groupe

$$\ker \phi = \{ \mathfrak{a} \in \widetilde{\mathcal{I}\mathcal{d}}_K \mid \exists \mathfrak{a} \in \mathcal{R}_K \text{ tel que } \delta_K(\mathfrak{a}) = \widetilde{\text{div}}_K(\mathfrak{a}) \},$$

donc l'égalité $\delta_K(\mathfrak{a}) = \widetilde{\text{div}}_K(\mathfrak{a})$ donne que les coefficients du diviseur principal aux places ℓ -adiques sont nulles, c'est à dire $\widetilde{v}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) = 0$ pour tout $\mathfrak{p} \mid \ell$. Il en résulte que $\ker \phi = \widetilde{\mathcal{P}\mathcal{r}}$ comme attendu.

(iv) $\Leftrightarrow$ (i) Le quotient $\mathcal{T}_K / \mathcal{T}_K^{(\gamma-1)}$ fixe une sous extension non-ramifié ℓ -décomposé de $K_{\infty}^{\text{cd}} / K^c$. Comme $\mathcal{T}_K^{(\gamma-1)}$ est la fermeture du sous-groupe dérivé du groupe de Galois $\text{Gal}(K_{\infty}^{\text{cd}} / K)$, l'extension fixée est abélienne maximale sur K , donc elle est rien d'autre que l'extension localement cyclotomique K^{lc} . On a bien $\mathcal{T}_K / \mathcal{T}_K^{(\gamma-1)} \simeq \text{Gal}(K^{\text{lc}} / K^c)$. $\square$

5. Weak Approximation Theorem

1.5.1 Conjecture de Gross-Kuz'min

Jusqu'à présent on a juste défini le ℓ -groupe des classes logarithmiques d'un corps de nombres K mais on connaît très peu ses propriétés quant à la *finitude*. D'après la théorie ℓ -adique de corps de classes, il s'identifie avec un quotient des groupes de Galois des extensions cyclotomique et localement cyclotomique, ces derniers sont incluses dans la ℓ -extension maximale abélienne du corps K , donc le groupe $\widetilde{Cl}_K$ est un pro- ℓ groupe, qui se révèle fini dans certains cas (voir le cas abélien et certains d'autres [Jau85, Jau87]) et que l'on conjecture fini en général.

Conjecture 1.5.1 (Gross Généralisée, Thm. & Def. 1.1.24 [Jau86]). *Le groupe de Galois $\text{Gal}(K^{lc}/K)$ de l'extension localement cyclotomique de K est un $\mathbb{Z}_\ell$ -module de rang 1. Autrement dit K^{lc} est une extension finie de la $\mathbb{Z}_\ell$ -extension cyclotomique de K .*

Il suit immédiatement qu'un corps de nombres K qui satisfait cette conjecture a pour ℓ -groupe de classes logarithmiques un groupe fini et inversement un corps de nombres ayant pour ℓ -groupe de classes logarithmiques un groupe fini, satisfait la conjecture de Gross pour le nombre premier ℓ .

1.5.2 Groupe d'unités logarithmiques

Définition 1.5.1. Pour tout ensemble fini S de places ultramétriques d'un corps de nombres K , nous appelons le ℓ -groupe des S -unités logarithmiques du corps K le sous-module de $\mathcal{R}_K$ défini par :

$$\widetilde{\mathcal{E}}_K^S = \{\varepsilon \in \mathcal{R}_K \mid \widetilde{v}_p(\varepsilon) = 0, \quad \forall p \notin S\}; \quad (1.28)$$

lorsque S est vide, on dénote $\widetilde{\mathcal{E}}_K$ pour $\widetilde{\mathcal{E}}_K^\emptyset$ le ℓ -groupe des unités logarithmiques.

Le ℓ -groupe des unités logarithmiques $\widetilde{\mathcal{E}}_K$ s'identifie par le principe de Hasse au ℓ -groupe des normes cyclotomiques, c'est à dire au sous-module du ℓ -groupe des idéles principaux $\mathcal{R}_K$ de K formé des éléments qui sont normes dans tous les étages finis K_n/K de la $\mathbb{Z}_\ell$ -extension cyclotomique K^c de K .

Remarque: En général le ℓ -groupe des normes cyclotomiques $\widetilde{\mathcal{E}}_K$ ne coïncide pas avec le tensorisé

$$\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} N_{K_n/K}(K_n^\times).$$

L'article [Jau16a] fait l'étude de certains cas où ces groupes sont égaux et donne des exemples de situations où ils sont distincts.

Lorsque l'ensemble $S \subset \text{Pl}_K^0$ contient l'ensemble des places $\text{Pl}_K(\ell)$ au-dessus de ℓ , le groupe $\widetilde{\mathcal{E}}_K^S$ coïncide avec le ℓ -adifié $\mathcal{E}_K^S = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E_K^S$ du groupe des S -unités du corps K [Jau94, Scolie 3.3] dont le rang essentiel est donné par le Théorème de Dirichlet :

$$\dim_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{E}_K^S = \dim_{\mathbb{Z}_\ell} \widetilde{\mathcal{E}}_K^S = r_K + c_K + s_K - 1.$$

Proposition 1.5.1. *Le rang essentiel du ℓ -groupe des unités logarithmiques d'un corps de nombres K est la somme $r_K + c_K + \delta_K$ des nombres des places réelles r_K , et complexes c_K et du défaut δ_K de la conjecture de Gross dans K , i.e. $\dim_{\mathbb{Z}_\ell} \widetilde{Cl}_K$. Autrement dit, on a*

$$\widetilde{\mathcal{E}}_K \simeq \mu_K \times \mathbb{Z}_\ell^{r_K + c_K + \delta_K}, \quad (1.29)$$

où μ_K désigne le ℓ -groupe des racines de l'unité dans K .

Preuve : Considérons la suite exacte de $\mathbb{Z}_\ell$ -modules noethériens

$$1 \rightarrow \widetilde{\mathcal{E}}_K \rightarrow \mathcal{E}'_K \xrightarrow{\text{div}_K} \bigoplus_{\mathfrak{p}|\ell} \mathbb{Z}_\ell \mathfrak{p} \rightarrow \widetilde{\mathcal{C}}_\ell \rightarrow \widetilde{\mathcal{C}}'_\ell \rightarrow 1,$$

où le groupe $\widetilde{\mathcal{C}}'_\ell \simeq \widetilde{\mathcal{C}}_\ell / \widetilde{\mathcal{C}}_\ell(\ell)$ (voir (1.30)) est un sous-groupe de $\mathcal{C}'_\ell$ qui est un groupe fini. L'application $\dim_{\mathbb{Z}_\ell}$ est du type d'Euler-Poincaré [Lan02, Ch. III §8], comme une suite exacte est un complexe acyclique sa caractéristique d'Euler $\chi_{\dim_{\mathbb{Z}_\ell}}$ est nulle [Lan02, Ch. XX §3]. D'où l'on obtient $\dim_{\mathbb{Z}_\ell} \widetilde{\mathcal{E}}_K = r_K + c_K + \delta_K$. $\square$

1.6 Résultats immédiats sur le groupe de classes logarithmiques

1.6.1 Un théorème d'Iwasawa Logarithmique

On finit ce chapitre avec la preuve du théorème énoncé à l'introduction, qui illustre les ressemblances entre les groupes de classes classiques et ceux logarithmiques.

Dans [DyDS99] les auteurs développent un algorithme pour le calcul du ℓ -groupe de classes logarithmiques, la clé de cet algorithme est dû au fait suivant :

Lemme 1.6.1 ([DyDS99]). *Soit $\mathcal{C}'_\ell$ le ℓ -groupe des ℓ -classes d'idéaux du corps de nombres K , c'est à dire le ℓ -sous-groupe de Sylow du quotient du groupe des classes par le sous-groupe des classes des idéaux construits sur les places au-dessus de ℓ ; et considérons l'application*

$$\begin{aligned} \theta : \widetilde{\mathcal{C}}_\ell &\longrightarrow \mathcal{C}'_\ell \\ \sum_{\mathfrak{p}} \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p} &\mapsto \prod_{\mathfrak{p} \nmid \ell} \mathfrak{p}^{(1/\lambda_{\mathfrak{p}}) \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}}. \end{aligned}$$

La suite

$$0 \longrightarrow \widetilde{\mathcal{C}}_\ell(\ell) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{C}}_\ell \xrightarrow{\theta} \mathcal{C}'_\ell \longrightarrow \text{coker } \theta \longrightarrow 0 \quad (1.30)$$

est exacte. Le terme à gauche $\widetilde{\mathcal{C}}_\ell(\ell)$ dénote le sous-groupe de $\widetilde{\mathcal{C}}_\ell$ engendré par les classes des diviseurs logarithmiques au-dessus de ℓ .

Théorème 1.6.1. *Soit $K_n = \mathbb{Q}(\zeta_{\ell^{n+1}})$. Si ℓ est un nombre premier régulier alors le ℓ -groupe des classes logarithmiques $\widetilde{\mathcal{C}}_{K_n}$ du corps K_n est trivial pour $n \geq 0$.*

Preuve : Par un théorème d'Iwasawa [Iwa56], lorsque ℓ est régulier la ℓ -partie du groupe de classes de K_n est triviale, donc le groupe $\mathcal{C}'_\ell$ est trivial pour tout $n \geq 0$. Enfin, on sait que dans $\mathbb{Q}(\zeta_{\ell^n})$ il y a qu'une place au-dessus de ℓ , donc le groupe $\widetilde{\mathcal{C}}_{K_n}(\ell)$ est trivial aussi pour tout $n \geq 0$. $\square$

Ce dernier résultat peut se déduire également d'un autre plus général qui fait usage de la définition de $\widetilde{\mathcal{C}}_\ell$ du point de vue des genres, pour en étudier certaines conditions de trivialité.

Théorème 1.6.2. [Jau16c, Prop. 8] *Soit $K_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ la $\mathbb{Z}_\ell$ -extension cyclotomique de K . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Le quotient des genres de $\mathcal{T}_K$ est trivial : $\widetilde{\mathcal{C}}_\ell = 1$.*
- (ii) *Les ℓ -groupes de ℓ -classes $\mathcal{C}'_{K_n}$ sont ultimement triviaux : $\mathcal{C}'_{K_n} = 1$ pour $n \gg 0$.*
- (iii) *Le module de Kuz'min-Tate $\mathcal{T}_K$ est trivial : $\mathcal{T}_K = 1$.*

Nous disons qu'un corps de nombres K est ℓ -logarithmiquement principal lorsque les conditions précédentes sont vérifiées.

Chapitre 2

Le groupe de classes logarithmiques le long des $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions

Un mathématicien qui n'a pas aussi une part de poète ne deviendra jamais un mathématicien accompli.

Karl Weierstrass

En 1959, le mathématicien japonais Kenkichi Iwasawa a fait une découverte fondamentale en théorie algébrique de nombres. Il a démontré que l'exposant e de l'ordre de la ℓ -partie du groupe des classes des étages le long d'une $\mathbb{Z}_\ell$ -extension quelconque d'un corps de nombres K , peut être exprimé par une formule qui dépend de trois entiers μ , λ et ν . Le résultat est le suivant :

Théorème (Iwasawa). *Soit K_∞/K une $\mathbb{Z}_\ell$ -extension d'un corps de nombres K , c'est-à-dire $\text{Gal}(K_\infty/K) \simeq \mathbb{Z}_\ell$. Il existent des entiers $\mu, \lambda \geq 0$ et ν , qui ne dépendent pas de n tels que*

$$e(K_\infty/K) = \mu \ell^n + \lambda n + \nu,$$

pour n suffisamment grand.

Dans son travail de thèse, Jaulent obtient une formule analogue pour le groupe des classes logarithmiques $\widetilde{Cl}$ le long d'une $\mathbb{Z}_\ell$ -extension cyclotomique. Il obtient ce résultat en considérant l'extension maximale K_∞^{lc} de K_∞ qui est non-ramifiée et ℓ -décomposée¹. Alors pour n assez grand le groupe de classes logarithmiques de $\widetilde{Cl}_n$ du n -ième étage de la tour cyclotomique s'exprime simplement comme

$$\widetilde{Cl}_n = \mathcal{C}' / \mathcal{C}'^{\omega_n},$$

néanmoins cette description n'est plus vraie pour des $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions qui sont non-cyclotomiques.

Ce chapitre s'intéresse à l'étude du groupe de classes logarithmiques le long des $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions non-cyclotomiques.

On démontre que effectivement, un résultat du type Iwasawa peut être trouvé pour de telles $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions, mais en considérant une méthode plus élaborée.

D'abord on montre que sous la conjecture de Gross-Kuz'min, une $\mathbb{Z}_\ell$ -extension non-cyclotomique est logarithmiquement ramifiée. On utilise donc les sous-groupes d'inertie logarithmique des

1. Elle n'est rien d'autre que l'extension maximale de K_∞ qui est logarithmiquement non-ramifiée

places de K qui ramifient logarithmiquement pour obtenir des extensions K_n^{lc} de K_n qui sont logarithmiquement non-ramifiées. Par contre, on ne peut appliquer directement la théorie d'Iwasawa puisque ces extensions sont infinies. Donc, il faut travailler avec les extensions cyclotomiques K_n^c des étages K_n . Finalement, on vérifie que la théorie d'Iwasawa peut être bien employée dans cette situation et on obtient le théorème suivant :

Théorème. *Soit K_∞/K une $\mathbb{Z}_\ell$ -extension non cyclotomique. Soit $\widetilde{Cl}_{K_n}$ le groupe des classes logarithmiques de K_n . Il existe des entiers $\tilde{\lambda}, \tilde{\mu} \geq 0$ et $\tilde{\nu}$, tels que*

$$|\widetilde{Cl}_{K_n}| = \ell^{\tilde{\mu}\ell^n + \tilde{\lambda}n + \tilde{\nu}},$$

pour n suffisamment grand.

Donc ceci complète l'étude du groupe de classes logarithmiques le long de $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions dans l'esprit original d'Iwasawa².

La dernière partie de ce chapitre fait l'étude des invariants $\tilde{\rho}$, $\tilde{\mu}$ et $\tilde{\lambda}$ associés au module logarithmique et on trouve des relations avec le module de la ℓ -extension maximale non-ramifiée de K_∞ .

Dans le cas cyclotomique classique on a le célèbre théorème de Ferrero et Washington :

Théorème. *Soit K une extension abélienne de $\mathbb{Q}$. Soit K^c la $\mathbb{Z}_\ell$ -extension cyclotomique de K . Alors $\mu = 0$.*

Ce qui implique en particulier que le même résultat est vrai dans le contexte logarithmique puisque dans ce cas $\mu = \tilde{\mu}$, c'est-à-dire $\tilde{\mu} = 0$.

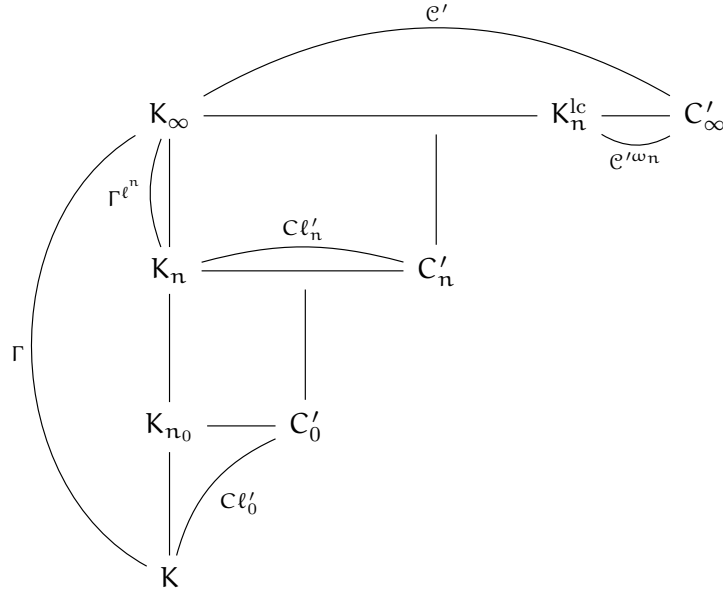
On démontre alors que sous une hypothèse de décomposition dans les places sauvages de K qui ramifient on a le même résultat $\mu = \tilde{\mu}$. On démontre aussi que les invariants $\tilde{\lambda}$ et λ ne diffèrent que par des facteurs cyclotomiques.

Finalement, on profite de l'implémentation du calcul du groupe de classes logarithmiques dans le logiciel PARI par Belabas et Jaulent [BJ16] pour donner des exemples numériques de nos résultats. Dans l'explication du cas cyclotomique tout au début du chapitre, on donne des exemples des calculs faits pour les premiers trois étages de la $\mathbb{Z}_3$ -extension cyclotomique de certains corps quadratiques. Et à la fin du chapitre, on calcule explicitement les invariants logarithmiques et classiques associés aux premiers étages des $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions dans le deux cas : cyclotomique et non-cyclotomique.

2.1 Le cas cyclotomique

Soit K un corps de nombres et ℓ un nombre premier. On considère $K^c = K_\infty = \bigcup K_n$ la $\mathbb{Z}_\ell$ -extension cyclotomique de K . On veut étudier les ℓ -groupes des classes logarithmiques $\widetilde{Cl}_{K_n}$ attachés aux étages finis de la tour K_∞ . Soit C'_n le ℓ -corps des ℓ -classes de K_n , i.e. la ℓ -extension maximale abélienne de K_n qui est non ramifié et ℓ -décomposée. La théorie des corps de classes identifie son groupe de Galois $\text{Gal}(C'_n/K_n)$ avec le ℓ -groupe Cl'_{K_n} des ℓ -classes des diviseurs de K_n . Soit $n_0 \geq 0$ le plus grand entier pour lequel K_{n_0} est contenu dans C'_0 . On a alors le diagramme suivant :

2. Kenkichi Iwasawa. On Γ -extensions of algebraic number fields. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 65:183–226, 1959



où $C'_\infty = \bigcup C'_n$ est la réunion des ℓ -corps des ℓ -classes associées aux étages finis de la tour cyclotomique. Le groupe de Galois $\mathcal{C}' = \text{Gal}(C'_\infty/K_\infty)$ s'identifie par la théorie des corps de classes avec la limite projective $\mathcal{C}' = \varprojlim \mathcal{C}\ell'_n$ pour les applications normes des ℓ -groupes des ℓ -classes $\mathcal{C}\ell'_n$. Le groupe de Galois $G = \text{Gal}(C'_\infty/K)$ est le produit semi-direct $G = \Gamma \ltimes \mathcal{C}'$, où Γ agit sur $\mathcal{C}'$ par conjugaison :

$$x^\gamma = \gamma x \gamma^{-1}; \quad (2.1)$$

donc $\mathcal{C}'$ est un Λ -module. Soit $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{K_n} = \text{Gal}(K_n^{lc}/K_n^c)$ le ℓ -groupe des classes logarithmiques du corps K_n . Sous la conjecture de Gross-Kuz'min dans K_n , c'est un groupe fini et en plus on a pour $n \geq 0$

$$\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{K_n} = \mathcal{C}' / \mathcal{C}'^{\omega_n}, \quad (2.2)$$

car le sous-groupe $\mathcal{C}'^{\omega_n}$ fixe l'extension maximale abélienne de K_n qui est ℓ -décomposée sur K_∞ , i.e. l'extension localement cyclotomique K_n^{lc} de K_n . On tire du lemme de Nakayama [Lan90, Ch. 5, §1] et de la finitude du quotient $\mathcal{C}' / \mathcal{C}'^{\omega_n}$ que $\mathcal{C}'$ est un Λ -module noethérien et de torsion, donc par le théorème de structure on a :

$$\mathcal{C}'^{\omega_n} \sim \mathcal{C}' \sim \left(\bigoplus \Lambda / f_j(T)^{m_j} \right) \oplus \left(\bigoplus \Lambda / \ell^{k_i} \right). \quad (2.3)$$

On obtient naturellement le résultat suivant analogue au théorème d'Iwasawa [Iwa59] classique

Théorème 2.1.1. *Soit K_∞/K la $\mathbb{Z}_\ell$ -extension cyclotomique de K . Soit $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{K_n}$ le groupe des classes logarithmiques de K_n . Il existe des entiers $\lambda', \mu' \geq 0$ et ν' indépendants de n et un entier n_0 tels que*

$$|\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{K_n}| = \ell^{\mu' \ell^n + \lambda' n + \nu'}, \quad (2.4)$$

pour tout $n \geq n_0$.

Remarque: Les paramètres μ', λ' et ν' sont notés en accord avec Λ -modules dont ils proviennent. Ceci sera éclairci dans la Section 2.3.1.

2.1.1 Calculs Explicites

Cette section a pour but d'illustrer l'utilisation des fonctions et des algorithmes publiés récemment dans [BJ16] pour calculer les groupes des classes logarithmiques. Nous calculons ces groupes pour les premiers étages des $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions. Le code ci-dessous correspond au langage utilisé en PARI/GP [The16].

Corps quadratiques, $\ell = 3$

Le programme suivant calcule le 3-groupe de classes logarithmiques pour les premiers trois étages ($K = K_0, K_1$ et K_2) de la tour cyclotomique d'un corps de nombres quadratique $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ayant 3-groupe de classes logarithmiques non trivial et dans lequel l'idéal (3) est complètement décomposé.

Sous les hypothèses précédentes on fait le calcul pour $-100 < d < 100$.

```
? {
  for(d=-100,100,
    if(d==1||!issquarefree(d),next);
    K=bnfinit(x^2-d,1);
    Cl=bnflog(K,3);
    if((#idealprimedec(K,3)!=2)||!Cl,next);
    T=polcompositum(K.pol,polsubcyclo(9,3))[1];
    E=bnfinit(nfinit([T.pol,10^5]),1);
    Cl1=bnflog(E,3);
    T=polcompositum(K.pol,polsubcyclo(27,9))[1];
    E=bnfinit(nfinit([T.pol,10^5]),1);
    Cl2=bnflog(E,3);
    print(Cl,Cl1,Cl2);)
}
```

	$\mathbb{Q}(\sqrt{d})$			$\mathbb{Q}(\sqrt{d}, \cos(2\pi/9))$			$\mathbb{Q}(\sqrt{d}, \cos(2\pi/27))$		
d	$\widetilde{Cl}_K$	$\widetilde{Cl}_K^{[\ell]}$	Cl'_K	$\widetilde{Cl}_{K_1}$	$\widetilde{Cl}_{K_1}^{[\ell]}$	Cl'_{K_1}	$\widetilde{Cl}_{K_2}$	$\widetilde{Cl}_{K_2}^{[\ell]}$	Cl'_{K_2}
-86	[3]	[3]	[]	[9, 9]	[3]	[9, 3]	[27, 27]	[3]	[27, 9]
-74	[9]	[9]	[]	[27]	[9]	[3]	[81]	[9]	[9]
-65	[3]	[3]	[]	[9]	[3]	[3]	[27]	[3]	[9]
-47	[9]	[9]	[]	[27]	[9]	[3]	[81]	[9]	[9]
-41	[27]	[27]	[]	[81, 3]	[27]	[3, 3]	[243, 9]	[27]	[9, 9]
-35	[3]	[3]	[]	[9]	[3]	[3]	[27]	[3]	[9]
-14	[3]	[3]	[]	[9]	[3]	[3]	[27]	[3]	[9]
67	[3]	[3]	[]	[3]	[]	[3]	[3]	[]	[3]

Remarque: Il a été démontré par Jaulent (voir 2.3.1) que lorsqu'on considère la $\mathbb{Z}_\ell$ -extensio cyclotomique d'un corps de nombres, le paramètre $\tilde{\mu}$ attaché au groupe de classes logarithmiques est égal au paramètre μ attaché au groupe de classes. Donc le théorème de Ferrero-Washington [FW79] reste valide dans le contexte logarithmique. On déduit que l'invariant $\tilde{\mu}$ vaut 0 pour les corps considérés dessus. En plus, on sait que dans le cas cyclotomique $\lambda' = \tilde{\lambda}$, où l'invariant λ' est celui associé à la suite des ℓ -groupes des ℓ -classes $\mathcal{Cl}'_n$. Les articles de Gold [Gol75a] et [Gol75b] nous donnent un critère pour déterminer la valeur de λ' pour les corps quadratiques imaginaires. Donc on est en position de donner explicitement la valeur des invariants $\tilde{\mu}$ et λ pour des exemples à la fin de ce chapitre (voir 2.4).

- Sous les mêmes hypothèses qu'au début, on s'intéresse aux premiers corps quadratiques réels ($d < 3000$) pour lesquels les 3-groupes de 3-classes ne sont pas triviaux : donc ces corps ont un 3-groupe de classes non trivial et le groupe engendré par les classes au-dessus de 3 est strictement plus petit.

	$\mathbb{Q}(\sqrt{d})$			$\mathbb{Q}(\sqrt{d}, \cos(2\pi/9))$			$\mathbb{Q}(\sqrt{d}, \cos(2\pi/27))$		
d	$\widetilde{\mathcal{Cl}}_K$	$\widetilde{\mathcal{Cl}}_K^{[\ell]}$	$\mathcal{Cl}'_K$	$\widetilde{\mathcal{Cl}}_{K_1}$	$\widetilde{\mathcal{Cl}}_{K_1}^{[\ell]}$	$\mathcal{Cl}'_{K_1}$	$\widetilde{\mathcal{Cl}}_{K_2}$	$\widetilde{\mathcal{Cl}}_{K_2}^{[\ell]}$	$\mathcal{Cl}'_{K_2}$
1129	[3]	[]	[3]	[3]	[]	[3]	[3]	[]	[3]
1654	[3]	[]	[3]	[3]	[]	[3]	[3]	[]	[3]
1954	[3]	[]	[3]	[3]	[]	[3]	[3]	[]	[3]
2419	[3]	[]	[3]	[3]	[]	[3]	[3]	[]	[3]
2713	[3]	[]	[3]	[9]	[]	[9]	[9]	[]	[9]
2971	[3]	[]	[3]	[3]	[]	[3]	[3]	[]	[3]

Remarque: Ces calculs ont pris 17 minutes et 25,573 ms.

- Enfin, sous les mêmes hypothèses qu'avant et ($d < 50\,000$), on rajoute la condition que le sous-groupe $\widetilde{\mathcal{Cl}}_K^{[\ell]}$ engendré par les deux idéaux $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}'$ au dessus de ℓ , ne soit pas trivial.

	$\mathbb{Q}(\sqrt{d})$			$\mathbb{Q}(\sqrt{d}, \cos(2\pi/9))$			$\mathbb{Q}(\sqrt{d}, \cos(2\pi/27))$		
d	$\widetilde{\mathcal{Cl}}_K$	$\widetilde{\mathcal{Cl}}_K^{[\ell]}$	$\mathcal{Cl}'_K$	$\widetilde{\mathcal{Cl}}_{K_1}$	$\widetilde{\mathcal{Cl}}_{K_1}^{[\ell]}$	$\mathcal{Cl}'_{K_1}$	$\widetilde{\mathcal{Cl}}_{K_2}$	$\widetilde{\mathcal{Cl}}_{K_2}^{[\ell]}$	$\mathcal{Cl}'_{K_2}$
3739	[9]	[3]	[3]	[27]	[3]	[9]	[81]	[3]	[27]
7726	[3,3]	[3]	[3]	[9,3,3]	[]	[9,3,3]	[27,3,3]	[]	[27,3,3]
11545	[9]	[3]	[3]	[9]	[]	[9]	[9]	[]	[9]
17134	[9]	[3]	[3]	[9]	[]	[9]	[9]	[]	[9]
19330	[9]	[3]	[3]	[9]	[]	[9]	[9]	[]	[9]

Remarque: Ces calculs ont pris 28 minutes et 44,565 ms.

2.2 Le cas non-cyclotomique

2.2.1 Préliminaires

Le ℓ -groupe des classes logarithmiques de degré arbitraire

En analogie à la suite classique on a la suite exacte suivante pour un corps de nombres K [BJ16] :

$$1 \rightarrow \widetilde{\mathcal{E}}_K \rightarrow \mathcal{R}_K \xrightarrow{\text{div}} \mathcal{D}\ell_K = \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \text{Pl}_K^0} \mathbb{Z}_\ell \mathfrak{p} \rightarrow \widetilde{\mathcal{C}}\ell_K^* \rightarrow 1, \quad (2.5)$$

où $\widetilde{\mathcal{E}}_K$ est le groupe des unités logarithmiques et $\mathcal{R}_K$ est le groupe d'idèles principaux du corps K ; son image dans $\mathcal{D}\ell_K$ est le groupe des diviseurs principaux logarithmiques.

Définition 2.2.1. $\widetilde{\mathcal{C}}\ell_K^*$ est appelé le ℓ -groupe des classes logarithmiques de degré arbitraire.

Nommé originalement le groupe des classes de valeurs absolues [Jau86, Ex. 1.1.19] et rebaptisé comme ℓ -groupe de classes logarithmiques [Jau16b], on change encore son nom pour continuer avec notre notion de ℓ -groupe des classes logarithmiques sans faire appel aux degrés des diviseurs.

Ainsi, le ℓ -groupe de classes logarithmiques $\widetilde{\mathcal{C}}\ell_K$ est le sous-groupe du groupe $\widetilde{\mathcal{C}}\ell_K^*$, formé des classes de diviseurs de degré 0.

Le groupe $\widetilde{\mathcal{C}}\ell_K^*$ est un $\mathbb{Z}_\ell$ -module de type fini (de rang 1 sous la Conjecture de Gross-Kuz'min) et infini. Il est isomorphe par la théorie ℓ -adique de corps de classes au groupe de Galois $\text{Gal}(K^{\text{lc}}/K)$ de l'extension abélienne localement cyclotomique maximale de K , donc

$$\text{Gal}(K^{\text{lc}}/K) \simeq \mathcal{J}_K / \widetilde{\mathcal{U}}_K \mathcal{R}_K. \quad (2.6)$$

Sur la ramification logarithmique

Soit K un corps de nombres et $\mathfrak{p}$ une place de K . Dans ce qui suit nous allons décrire la ramification logarithmique à la place $\mathfrak{p}$ pour les ℓ -extensions abéliennes de K .

On définit le groupe d'inertie logarithmique $\widetilde{\mathcal{I}}_{\mathfrak{p}}$ comme l'image de $\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}$ dans $\text{Gal}(K^{\text{ab}}/K)$ ³. Soient L_1/K et L_2/K deux sous-corps de K^{ab} emboîtés $L_1 \subset L_2$. Les sous-groupes $\widetilde{\mathcal{I}}_{\mathfrak{p}} \cap \text{Gal}(K^{\text{ab}}/L_1)$ et $\widetilde{\mathcal{I}}_{\mathfrak{p}} \cap \text{Gal}(K^{\text{ab}}/L_2)$ sont les sous-groupes d'inertie logarithmique correspondant aux extensions K^{ab}/L_1 et K^{ab}/L_2 respectivement, et le dernier est un sous-groupe du premier. Le premier $\mathfrak{p}$ est dit logarithmiquement ramifié dans l'extension L_2/L_1 si $\widetilde{\mathcal{I}}_{\mathfrak{p}} \cap \text{Gal}(K^{\text{ab}}/L_1) \neq \widetilde{\mathcal{I}}_{\mathfrak{p}} \cap \text{Gal}(K^{\text{ab}}/L_2)$, et logarithmiquement non ramifié si $\widetilde{\mathcal{I}}_{\mathfrak{p}} \cap \text{Gal}(K^{\text{ab}}/L_1) = \widetilde{\mathcal{I}}_{\mathfrak{p}} \cap \text{Gal}(K^{\text{ab}}/L_2)$ auquel cas le sous-groupe d'inertie logarithmique de $\mathfrak{p}$ dans l'extension K^{ab}/L_1 fixe L_2 :

$$\widetilde{\mathcal{I}}_{\mathfrak{p}} \cap \text{Gal}(K^{\text{ab}}/L_1) \subset \text{Gal}(K^{\text{ab}}/L_2).$$

Une place $\mathfrak{q}_i$ de L_i (avec $i = 1, 2$) au-dessus de $\mathfrak{p}$ est dite logarithmiquement non ramifiée dans l'extension L_2/L_1 si et seulement si $\mathfrak{p}$ est logarithmiquement non ramifiée dans L_2/L_1 . Autrement $\mathfrak{q}_i$ est dite logarithmiquement ramifiée. Le sous-groupe d'inertie de l'extension L_2/L_1 est donné par l'image de $\widetilde{\mathcal{I}}_{\mathfrak{p}} \cap \text{Gal}(K^{\text{ab}}/L_1)$ par le morphisme $\text{Gal}(K^{\text{ab}}/L_1) \rightarrow \text{Gal}(L_2/L_1)$. Ainsi

3. On ne se soucie pas de la place $\bar{\mathfrak{p}}$ dans K^{ab} au dessus de $\mathfrak{p}$, puisque les groupes résultants sont conjugués par l'action de $\text{Gal}(K^{\text{ab}}/K)$ donc coïncident.

q_2 est logarithmiquement non ramifiée dans L_2/L_1 si et seulement si le sous-groupe d'inertie logarithmique $\tilde{I}_{q_2}(L_2/L_1)$ est trivial.

Remarque:

La définition ci-dessus de ramification logarithmique coïncide avec la Définition 1.2.3 pour les extensions finies.

En fait si L/K est une ℓ -extension abélienne finie et $\mathfrak{P}$ une place de L au dessus de $\mathfrak{p} \in \text{Pl}_K$, le sous groupe d'inertie logarithmique $\tilde{I}_{\mathfrak{P}}$ de l'extension L/K est l'image de $\tilde{I}_{\mathfrak{p}} \simeq \tilde{U}_{\mathfrak{p}}$ dans le groupe de Galois $\text{Gal}(L/K) \simeq \mathcal{J}_K / N_{L/K}(\mathcal{J}_L)\mathcal{R}_K$:

$$\tilde{I}_{\mathfrak{P}} \simeq \tilde{U}_{\mathfrak{p}} / \tilde{U}_{\mathfrak{p}} \cap N_{L/K}(\mathcal{J}_L)\mathcal{R}_K;$$

d'un autre côté l'indice de ramification logarithmique est défini comme le degré $\tilde{e}_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}} = [L_{\mathfrak{P}} : L_{\mathfrak{P}} \cap K_{\mathfrak{p}}^c]$, qui est égal à l'ordre du groupe de Galois

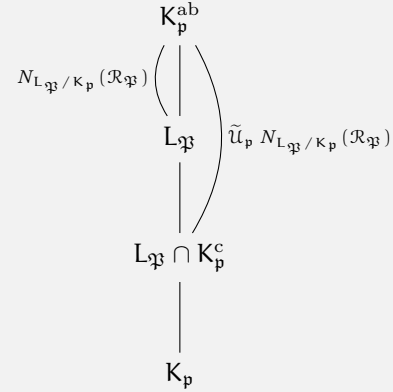
$$\text{Gal}(L_{\mathfrak{P}}/L_{\mathfrak{P}} \cap K_{\mathfrak{p}}^c) = \tilde{U}_{\mathfrak{p}} N_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}(\mathcal{R}_{\mathfrak{P}}) / N_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}(\mathcal{R}_{\mathfrak{P}}).$$

Puisque L/K est abélienne ([Jau86, Ch. 1 §2.a]) on a

$$N_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}(\mathcal{R}_{\mathfrak{P}}) = \mathcal{R}_{\mathfrak{p}} \cap N_{L/K}(\mathcal{J}_L)\mathcal{R}_K$$

et alors on a bien

$$\tilde{I}_{\mathfrak{P}} \simeq \text{Gal}(L_{\mathfrak{P}}/L_{\mathfrak{P}} \cap K_{\mathfrak{p}}^c).$$



Théorème 2.2.1. *Les $\mathbb{Z}_{\ell}$ -extensions sont logarithmiquement non ramifiées aux places modérées.*

Preuve : Si $\mathfrak{p}$ est modérée, elle ne divise pas les degrés $[K_n : K]$ des étages finis K_n de la $\mathbb{Z}_{\ell}$ -extension considérée, et les indices de ramification logarithmique et classique coïncident (1.11). Le résultat suit alors du fait que les $\mathbb{Z}_{\ell}$ -extensions sont non ramifiées aux places modérées au sens classique [Was97, Prop. 13.2]. $\square$

Théorème 2.2.2. *Soit K un corps de nombres qui satisfait la conjecture de Gross-Kuz'min, et soit K_{∞}/K une $\mathbb{Z}_{\ell}$ -extension non cyclotomique de K . Au moins une place $\mathfrak{p}$ au-dessus de ℓ se ramifie logarithmiquement dans K_{∞}/K .*

Preuve : Sous la conjecture de Gross-Kuz'min, le groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^*$ est un $\mathbb{Z}_{\ell}$ -module noethérien de dimension 1, qui a pour sous-groupe de torsion $(\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^*)^{\text{tors}} \simeq \widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$. Supposons que K_{∞} est logarithmiquement non ramifiée ; alors l'application

$$\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^* \simeq \text{Gal}(K^{\text{lc}}/K) \rightarrow \Gamma = \text{Gal}(K_{\infty}/K)$$

est surjective et son noyau contient le groupe des classes logarithmiques $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K = (\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^*)^{\text{tor}}$; donc K_{∞} est fixée par $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$ ce qui entraîne une contradiction, puisqu'on a supposé K_{∞} distincte de l'extension cyclotomique. $\square$

Remarque: Si la conjecture de Gross-Kuz'min est en défaut dans K le groupe de classes logarithmiques $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$, est infini, et il existe une $\mathbb{Z}_{\ell}$ -sous-extension de K^{lc} autre que la cyclotomique. Toutes les deux sont cependant localement cyclotomiques.

Inversement, si la conjecture de Gross-Kuzmin est vraie dans K , le groupe de classes logarithmiques fournit un critère du type global-local pour déterminer quand une $\mathbb{Z}_{\ell}$ -extension est cyclotomique.

Sous les mêmes hypothèses que le théorème précédent, on a le résultat suivant :

Corollaire 2.2.1. *Il existe un d tel que K_∞/K_d est totalement log-ramifiée en un ensemble non vide de places au-dessus de ℓ et logarithmiquement non ramifié pour toutes les autres places.*

Preuve : Soient $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$ les places dans K au-dessus de ℓ qui se ramifient logarithmiquement. Leur groupes d'inertie logarithmique $\tilde{I}_i$ sont fermés et non triviaux dans $\Gamma = \text{Gal}(K_\infty/K)$, donc on a

$$\tilde{I}_i \simeq \Gamma^{\ell^{d_i}},$$

si l'on prend $d = \max d_i$, il est clair que l'extension K_∞/K_d est totalement log-ramifiée. $\square$

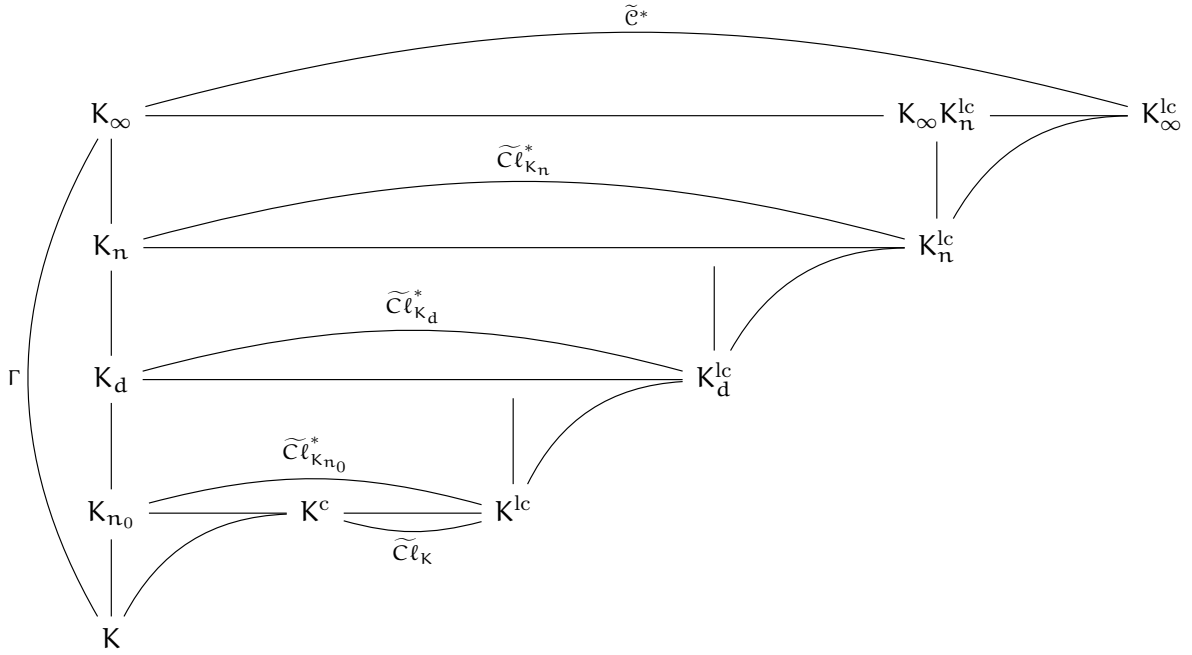
Définition 2.2.2. On dit qu'une $\mathbb{Z}_\ell$ -extension K_∞ est localement disjointe de K^c lorsqu'il existe une place $\mathfrak{p} \in \text{Pl}_K$ qui est totalement ramifiée dans K_∞/K au sens logarithmique, ce qui équivaut à dire que K_∞ est globalement disjointe de l'extension localement cyclotomique K^{lc} de K .

Remarque: Notons que les définitions précédentes sont en fait équivalentes. D'abord si une place $\mathfrak{p} \in \text{Pl}_K$ est totalement ramifiée au sens logarithmique, l'extension K_1/K est disjointe de l'extension localement cyclotomique K^{lc} . Puisque K^{lc} est l'extension maximale abélienne de K qui non-ramifiée au sens logarithmique. Inversement, supposons que K_∞ et K^{lc} sont globalement disjointes. Sous la conjecture de Gross-Kuz'min l'extension K_∞/K est logarithmiquement ramifiée. En plus, il existe au moins une place qui se ramifie au sens logarithmique dans K_1/K , sinon K_1/K serait non-ramifiée au sens logarithmique et on aurait $K_1 \subset K_\infty \cap K^c$.

Scolie. Soient $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$ les places dans K au-dessus de ℓ qui ramifient logarithmiquement et soit $n_0 = \min\{d_i \mid \tilde{I}_i \simeq \Gamma^{\ell^{d_i}}\}$. Il en résulte que toute sous-extension finie de K_∞/K_{n_0} est localement disjointe de la $\mathbb{Z}_\ell$ -extension cyclotomique $K_{n_0}^c/K_{n_0}$.

2.2.2 Théorie d'Iwasawa

Soit K_∞/K une $\mathbb{Z}_\ell$ -extension non cyclotomique de K . Sous la conjecture de Gross-Kuz'min soient $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$ les places de K au-dessus de ℓ qui se ramifient logarithmiquement (Thm. 2.2.2). Il suit de la section précédente qu'il existe deux entiers n_0 et d tels que $d \geq n_0 \geq 0$; ainsi que toute sous-extension finie de K_∞/K_{n_0} est localement disjointe de la $\mathbb{Z}_\ell$ -extension cyclotomique $K_{n_0}^c/K_{n_0}$; et K_∞/K_d est complètement log-ramifiée. Cette situation est illustrée dans le diagramme suivant :



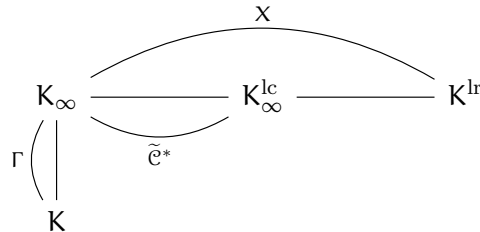
Le groupe $\widetilde{C}^* = \varprojlim \widetilde{C\ell}_{K_n}^*$ est la limite projective des groupes de classes logarithmiques de degré arbitraire $\widetilde{C\ell}_{K_n}^*$ associés aux étages finis K_n de la $\mathbb{Z}_\ell$ -extension, et s'identifie au groupe de Galois de la ℓ -extension maximale abélienne logarithmiquement non-ramifiée de K_∞ . Il en résulte que K_n^{lc} est la sous-extension maximale de K_∞^{lc} ⁴ qui est abélienne sur K_n et totalement décomposé sur K_n^c . Donc on a des isomorphismes de groupes de Galois

$$\widetilde{C\ell}_{K_n}^* = \text{Gal}(K_n^{lc}/K_n) \simeq \text{Gal}(K_\infty K_n^{lc}/K_\infty). \quad (2.7)$$

Le groupe Γ agit par conjugaison sur $\widetilde{C}^*$ qui fait de lui un Λ -module; où Λ est l'algèbre d'Iwasawa $\mathbb{Z}_\ell[[\Gamma]]$. De plus, cette action de conjugaison induit celle du produit semi-direct $\Gamma \ltimes \widetilde{C}^*$ qui s'identifie au groupe de Galois $G = \text{Gal}(K_\infty^{lc}/K)$.

Proposition 2.2.1. *$\widetilde{C}^*$ est un Λ -module noethérien et sous la conjecture de Gross-Kuz'min de torsion.*

Preuve : La pro- ℓ -extension abélienne maximale qui est localement cyclotomique K^{lc} de K est fixée par le groupe de normes $\widetilde{U}_K$, qui contient $\prod_{p \neq \ell} \mu_p$, le groupe de normes qui fixe la ℓ -extension abélienne maximale de K qui est ℓ -ramifiée : K^{lr} . Le Λ -module $\widetilde{C}^*$ s'exprime comme un quotient du Λ -module noethérien $X = \text{Gal}(K^{lr}/K_\infty)$ [Iwa73, Thm. 4], d'où la propriété noethérienne.



4. Attention! On a $K_\infty K^{lc} \subseteq K_\infty^{lc}$ mais en général l'égalité est en défaut.

Or, pour $n \geq 0$ soit $\tilde{C}_{\infty/n}$ le ℓ -corps des ℓ -genres logarithmiques de l'extension procyclique K_∞/K_n , i.e. l'extension abélienne maximale de K_n qui est logarithmiquement non ramifiée sur K_∞ , i.e. est l'extension abélienne maximale de K_n contenue dans K_∞^{lc} . On a la suite emboîtée

$$K_\infty \subseteq \tilde{C}_{\infty/0} \subseteq \tilde{C}_{\infty/1} \subseteq \cdots \subseteq \tilde{C}_{\infty/n} \subseteq \cdots \subseteq K_\infty^{\text{lc}},$$

et on a bien $K_\infty^{\text{lc}} = \bigcup_{n \geq 0} \tilde{C}_{\infty/n}$. Donc on a des groupes de Galois correspondants

$$\omega_n \tilde{C}^* = \text{Gal}(K_\infty^{\text{lc}}/\tilde{C}_{\infty/n}) \quad \tilde{C}^*/\omega_n \tilde{C}^* = \text{Gal}(\tilde{C}_{\infty/n}/K_\infty), \quad n \geq 0.$$

Soit $n \geq d$ comme dans le Corollaire 2.2.1 et soient $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$ les places de K au-dessus de ℓ qui ramifient logarithmiquement. Pour chaque i soit $\tilde{I}_i$ le groupe d'inertie logarithmique de l'extension $\tilde{C}_{\infty/n}/K_n$. Puisque $\mathfrak{p}$ est totalement log-ramifiée dans K_∞ et comme $\tilde{C}_{\infty/n}/K_\infty$ est logarithmiquement non-ramifiée, les groupes $\tilde{I}_i$ sont procycliques isomorphes à $\Gamma^{\ell^n} \simeq \mathbb{Z}_\ell$, pour $i = 1, \dots, s$. De l'autre côté aucune place hors les $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$ n'est logarithmiquement ramifiée dans $\tilde{C}_{\infty/n}$. Par conséquent on a $\text{Gal}(\tilde{C}_{\infty/n}/K_n^{\text{lc}}) = \tilde{I}_1 \tilde{I}_2 \cdots \tilde{I}_s$ car K_n^{lc} est l'extension maximale abélienne de K_n logarithmiquement non ramifiée contenue dans $\tilde{C}_{\infty/n}$. Sous la conjecture de Gross-Kuz'min $\tilde{C}_{K_n}^* = \text{Gal}(K_n^{\text{lc}}/K_n)$ est un $\mathbb{Z}_\ell$ -module noethérien de dimension 1, donc

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{Z}_\ell} \text{Gal}(\tilde{C}_{\infty/n}/K) &= \dim_{\mathbb{Z}_\ell} \text{Gal}(K_n^{\text{lc}}/K_n) + \dim_{\mathbb{Z}_\ell}(\tilde{I}_1 \cdots \tilde{I}_s) \\ &\leq 1 + \sum_{i=1}^s [K_{\mathfrak{p}_i} : \mathbb{Q}_\ell] \end{aligned}$$

d'où il suit que

$$\dim_{\mathbb{Z}_\ell} \text{Gal}(\tilde{C}_{\infty/n}/K_\infty) = \dim_{\mathbb{Z}_\ell} \text{Gal}(\tilde{C}_{\infty/n}/K) - 1 \leq \sum_{i=1}^s [K_{\mathfrak{p}_i} : \mathbb{Q}_\ell],$$

c'est à dire $\dim_{\mathbb{Z}_\ell} \tilde{C}^*/\omega_n \tilde{C}^* \leq \sum_{i=1}^s [K_{\mathfrak{p}_i} : \mathbb{Q}_\ell]$, ce qui est vrai pour tout $n \geq d$, et par conséquent pour tout $n \geq 0$. Donc $\tilde{C}^*$ est de Λ -torsion parce que la dimension de $\tilde{C}^*/\omega_n \tilde{C}^*$ est bornée pour tout $n \geq 0$ [Iwa73, Lemme 3]. $\square$

Proposition 2.2.2. *Soit $\tilde{C} = \varprojlim \tilde{C}_{K_n}$ la limite projective des groupes de classes logarithmiques associés aux étages finis de la tour K_∞/K . Sous la conjecture de Gross-Kuz'min dans K_∞ il vient que*

$$\tilde{C}^* \simeq \tilde{C} \oplus \mathbb{Z}_\ell. \quad (2.8)$$

Preuve : Considérons la suite exacte

$$0 \rightarrow \tilde{C}_{K_n} \rightarrow \tilde{C}_{K_n}^* \rightarrow \mathbb{Z}_\ell \rightarrow 0;$$

si l'on prend la limite projective $\varprojlim$ pour les applications de la norme arithmétique dans chacun des termes on obtient

$$0 \rightarrow \tilde{C} \rightarrow \tilde{C}^* \rightarrow \mathbb{Z}_\ell \rightarrow 0;$$

puisque les modules $\tilde{\mathcal{J}}_{K_{n+1}}/\mathcal{R}_{K_{n+1}}$ sont saturés pour les normes arithmétiques N_{K_{n+1}/K_n} [Jau86, Thm. 1.1.26.], c'est à dire les normes arithmétiques sont surjectives et satisfont la condition de Mittag-Leffler [Wei94, §3.5]. $\square$

Proposition 2.2.3. Soit Y_0 le $\mathbb{Z}_\ell$ -sous-module de $\tilde{\mathcal{C}}$ engendré par $\{\tilde{a}_i \mid 2 \leq i \leq s\}$ et par $\omega_0 \tilde{\mathcal{C}} = T\tilde{\mathcal{C}}$. Soit $Y_n = \frac{\omega_n}{\omega_0} Y_0$, où

$$\frac{\omega_n}{\omega_0} = 1 + \gamma + \gamma^2 + \dots + \gamma^{\ell^n - 1} = \frac{(1 + T)^{\ell^n} - 1}{T}.$$

Alors

$$\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{K_n} \simeq \tilde{\mathcal{C}}/Y_n \quad \text{pour } n \geq 0.$$

Preuve : D'abord, on démontre le cas $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K \simeq \tilde{\mathcal{C}}/Y_0$. L'extension localement cyclotomique K^{lc} est la plus grande extension abélienne logarithmiquement non ramifiée de K^c contenue dans K_∞^{lc} . Son groupe de Galois $\text{Gal}(K^{lc}/K^c)$ est donc égal à $\text{Gal}(K_\infty^{lc}/K^c)/Z_0$, où Z_0 est le plus petit sous-groupe de $H = \text{Gal}(K_\infty^{lc}/K)$ contenant le sous-groupe dérivé H' ainsi que les sous-groupes d'inertie logarithmique $\tilde{I}_i$, $1 \leq i \leq s$. La décomposition de H en produit semi-direct de $\tilde{I}_1$ par $\tilde{\mathcal{C}}$ nous donne

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{C}\ell}_K = \text{Gal}(K^{lc}/K^c) &\simeq H / \text{Gal}(K_\infty^{lc}/K^{lc}) \\ &\simeq \tilde{\mathcal{C}}\tilde{I}_1 / \langle \tilde{I}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_s, \omega_0 \tilde{\mathcal{C}} \rangle \\ &\simeq \tilde{\mathcal{C}} / \langle \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_s, \omega_0 \tilde{\mathcal{C}} \rangle = \tilde{\mathcal{C}}/Y_0. \end{aligned}$$

Or, supposons $n \geq 1$. Si l'on remplace K^c par K_n^c , K_∞/K_n^c est toujours une $\mathbb{Z}_\ell$ -extension. Le résultat ci-dessus peut être appliqué en remplaçant le pro-générateur γ par γ^{ℓ^n} et les $\tilde{\sigma}_i$ deviennent $\tilde{\sigma}_i^{\ell^n}$. On observe que pour tout entier k , on a :

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_i^k &= (\tilde{a}_i \tilde{\sigma}_1)^k \\ &= \tilde{a}_i (\tilde{\sigma}_1 \tilde{a}_i \tilde{\sigma}_1^{-1}) (\tilde{\sigma}_1^2 \tilde{a}_i \tilde{\sigma}_1^{-2}) \dots (\tilde{\sigma}_1^{k-1} \tilde{a}_i \tilde{\sigma}_1^{-(k-1)}) \tilde{\sigma}_1^k \\ &= \tilde{a}_i^{1 + \tilde{\sigma}_1 + \dots + \tilde{\sigma}_1^{k-1}} \tilde{\sigma}_1^k \end{aligned}$$

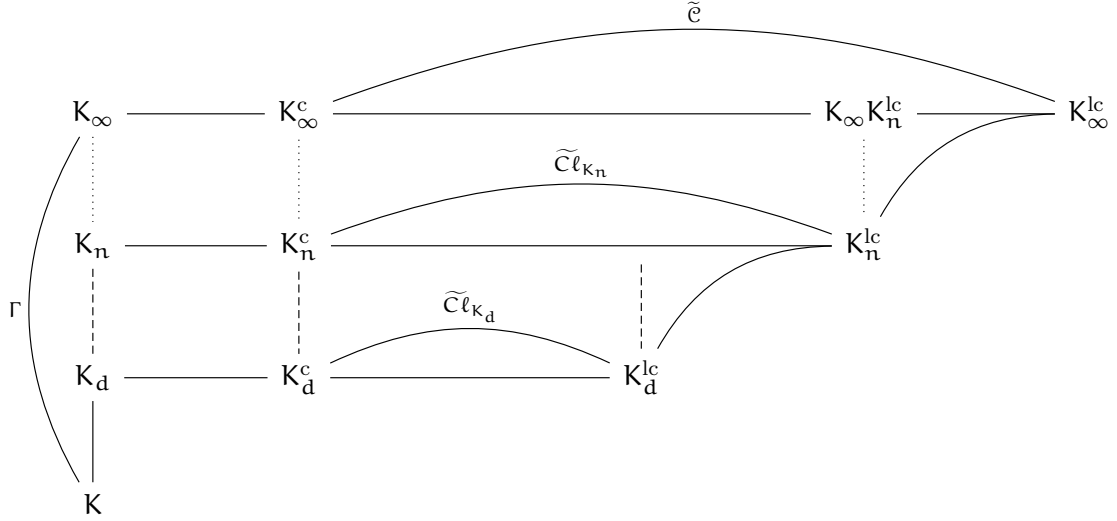
et en particulier, pour $k = \ell^n$, l'isomorphisme $\tilde{I}_1 \simeq \Gamma$ donne

$$\tilde{\sigma}_i^{\ell^n} = \tilde{a}_i^{\omega_n/\omega_0} (\tilde{\sigma}_1)^{\ell^n}.$$

Ce qui implique que les groupes d'inertie logarithmique de $H_n = \text{Gal}(K_\infty^{lc}/K_n^c)$ sont engendrés par les $\frac{\omega_n}{\omega_0} \tilde{a}_i$. En fin, le sous-groupe dérivé H'_n de H_n est engendré par ω_n . D'où le résultat attendu. $\square$

Cas général

Maintenant, on reprend la situation exposée au début de la section présente. Soit K_∞/K une $\mathbb{Z}_\ell$ -extension non cyclotomique de K . Soient $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$ les places de K qui se ramifient logarithmiquement et soit d le plus petit entier tel que la $\mathbb{Z}_\ell$ -extension K_∞/K_d est complètement log-ramifiée.



On va appliquer la Proposition 2.2.3 pour l'extension K_∞/K_d , le groupe $\tilde{\mathcal{C}}$ étant le même que celui de l'extension originale. Le pro-générateur γ^{ℓ^d} engendre $\text{Gal}(K_\infty/K_d^c)$, et naturellement $\omega_d \tilde{\mathcal{C}}$ engendre le sous-groupe dérivé de $\text{Gal}(K_\infty/K_d)$. Pour $n \geq d$ on a

$$\frac{\omega_n}{\omega_d} = 1 + \gamma^{\ell^d} + \gamma^{2\ell^d} + \cdots + \gamma^{\ell^n - \ell^d}, \quad (2.10)$$

et il vient que le sous-groupe dérivé de $\text{Gal}(K_\infty/K_n)$ est donné par

$$\frac{\omega_n}{\omega_d}(\omega_d \tilde{\mathcal{C}}) = \omega_n \tilde{\mathcal{C}};$$

et en général pour les sous-modules Y_n on obtient

$$Y_n = \frac{\omega_n}{\omega_d} Y_d.$$

La proposition suivante encapsule les développements précédents.

Proposition 2.2.4. *Soit K_∞/K une $\mathbb{Z}_\ell$ -extension non cyclotomique. Il existe $d \geq 0$ tel que*

$$\tilde{\mathcal{C}}_{K_n} \simeq \tilde{\mathcal{C}}/Y_n \quad \text{pour } n \geq d.$$

La suite exacte

$$0 \longrightarrow Y_d \longrightarrow \tilde{\mathcal{C}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{C}}_{K_d} \longrightarrow 0 \quad (2.11)$$

établit un pseudo-isomorphisme $Y_d \sim \tilde{\mathcal{C}}$, c'est à dire un morphisme $Y_d \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}$ de Λ -modules de noyau et conoyau finis.

Remarque: En général, la relation de pseudo-isomorphisme n'est pas une relation d'équivalence, mais dans la catégorie de Λ -modules noéthériens et de torsion cette relation est d'équivalence.

Rappelons le théorème fondamental suivant (voir [VG14, Cor 2.3], ou [Was97, Thm 13.12] pour une approche matricielle).

Théorème 2.2.3 (Théorème de Structure des Λ -modules noethériens). *Tout Λ -module noethérien M est pseudo-isomorphe à un unique Λ -module élémentaire :*

$$M \sim \Lambda^r \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^s \Lambda / \ell^{n_i} \Lambda \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^t \Lambda / (f_j(T)^{m_j}) \Lambda \right),$$

où $r, s, t, n_i, m_j \in \mathbb{Z}$ et les f_i sont des polynômes distingués et irréductibles.

Puisque $\tilde{\mathcal{C}}$ est de torsion 2.2.1, on a

$$Y_d \sim \tilde{\mathcal{C}} \sim E = \left(\bigoplus_{i=1}^s \Lambda / \ell^{n_i} \Lambda \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^t \Lambda / (f_j(T)^{m_j}) \Lambda \right),$$

pour connaître l'ordre des quotients $|\tilde{\mathcal{C}}\ell_{K_n}| = \frac{|\tilde{\mathcal{C}}|}{|Y_n|}$ on observe que

$$|\tilde{\mathcal{C}}\ell_{K_n}| = |\tilde{\mathcal{C}}/Y_n| = |\tilde{\mathcal{C}}/Y_d| |Y_d/Y_n|,$$

donc il suffit de connaître l'ordre des quotients Y_d/Y_n puisque le facteur à gauche du produit reste constant. En outre, on sait que

$$\begin{aligned} |Y_d/Y_n| &= |Y_d / \frac{\omega_n}{\omega_d} Y_d| \\ &= \ell^c |E / \frac{\omega_n}{\omega_d} E| \end{aligned}$$

où E est le Λ -module élémentaire tel que $Y_d \sim E$ et c est une constante. Et l'ordre du quotient de E par $\frac{\omega_n}{\omega_d} E$ est donné par une formule de la forme

$$|E / \frac{\omega_n}{\omega_d} E| = \ell^{m_0 \ell^n + l_0 n + c} \text{ pour } n \geq n_0,$$

pour certains entiers l_0, m_0, n_0 et c .

Donc la théorie développée par Iwasawa s'applique aussi aux invariants logarithmiques tels que le groupe des classes logarithmiques (sous la Conjecture de Gross-Kuz'min). En conséquence on obtient le résultat suivant.

Théorème 2.2.4. *Soit K_∞/K une $\mathbb{Z}_\ell$ -extension non cyclotomique. Soit $\tilde{\mathcal{C}}\ell_{K_n}$ le groupe des classes logarithmiques de K_n . Il existe des entiers $\tilde{\lambda}, \tilde{\mu} \geq 0$ et $\tilde{\nu}$, tels que*

$$|\tilde{\mathcal{C}}\ell_{K_n}| = \ell^{\tilde{\mu} \ell^n + \tilde{\lambda} n + \tilde{\nu}},$$

pour n suffisamment grand.

2.3 Les paramètres structurels d'un module sur l'algèbre d'Iwasawa

Rappelons le résultat suivant (sur la structure des anneaux semi-simples sur l'algèbre Λ) qui n'est qu'une légère généralisation du résultat classique d'Iwasawa [Iwa73].

On dispose d'un corps de nombres K , d'une $\mathbb{Z}_\ell$ -extension, $K_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ de groupe de Galois

$$\text{Gal}(K_\infty/K) = \varprojlim \mathbb{Z}/\ell^n \mathbb{Z} = \gamma^{\mathbb{Z}_\ell}$$

(celle dernière étant la notation multiplicative) et aussi d'une extension abélienne L/K de degré étranger à ℓ , de groupe de Galois Δ qu'on regarde en haut de la tour :

$$\Delta = \text{Gal}(LK_\infty/K_\infty) \cong \text{Gal}(L/K).$$

On note $\Lambda = \mathbb{Z}_\ell[[\gamma - 1]]$ l'algèbre d'Iwasawa en l'indéterminée $\gamma - 1$ et l'algèbre de groupe

$$\Lambda[\Delta] = \mathbb{Z}_\ell[\Delta][[\gamma - 1]].$$

Soit M un $\Lambda[\Delta]$ -module noethérien. Ses composantes isotypiques M_φ sont des $\Lambda_\varphi = \mathbb{Z}_\varphi[[\gamma - 1]]$ -modules noethériens ($\mathbb{Z}_\varphi$ est l'anneau local des entiers d'une extension cyclotomique non ramifiée de $\mathbb{Q}_\ell$), pseudo-isomorphes comme tels à des modules élémentaires

$$M_\varphi \sim \Lambda_\varphi^{\rho_\varphi} \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^{s_\varphi} \Lambda_\varphi / \ell^{\mu_{\varphi,i}} \Lambda_\varphi \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=0}^{t_\varphi} \Lambda_\varphi / P_{\varphi,j} \Lambda_\varphi \right)$$

où les $P_{\varphi,j}$ sont des polynômes distingués de l'anneau $\mathbb{Z}_\varphi[\gamma - 1] = \mathbb{Z}_\varphi[\gamma]$ ordonnés par divisibilité et $(\mu_{\varphi,i})_i$ est une suite décroissante finie d'entiers non nuls. L'entier ρ_φ est la dimension $\dim_{\Lambda_\varphi} M_\varphi$ du Λ_φ -module M_φ , et le polynôme

$$\chi_\varphi = \prod_{i=0}^{s_\varphi} \ell^{\mu_{\varphi,i}} \prod_{j=0}^{t_\varphi} P_{\varphi,j} \quad (2.12)$$

est le polynôme caractéristique de son sous-module de Λ_φ -torsion. On pose :

$$\rho_\varphi = \dim_{\Lambda_\varphi} M_\varphi \quad \mu_\varphi = \sum_i \mu_{\varphi,i} \quad \lambda_\varphi = \sum_j \deg(P_{\varphi,j}). \quad (2.13)$$

On dénote $R_{\mathbb{Z}_\ell}(\Delta)$ le groupe de caractères ℓ -adiques virtuels du groupe Δ sur l'anneau $\mathbb{Z}_\ell$. L'ordre d du groupe abélien Δ étant supposé étranger à ℓ , l'anneau $R_{\mathbb{Z}_\ell}(\Delta)$ est muni d'un produit scalaire à valeurs dans $\mathbb{Z}_\ell$

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{d} \sum_{\tau \in \Delta} \varphi(\tau^{-1}) \psi(\tau); \quad (2.14)$$

il vient que le degré d_φ du caractère φ peut être écrit comme $\langle \varphi, \varphi \rangle$.

Définition 2.3.1. On dit que les caractères de $R_{\mathbb{Z}_\ell}(\Delta)$

$$\rho = \sum_\varphi \rho_\varphi \varphi, \quad \mu = \sum_\varphi \mu_\varphi \varphi \quad \text{et} \quad \lambda = \sum_\varphi \lambda_\varphi \varphi,$$

sont les invariants structurels du $\Lambda[\Delta]$ -module M .

Définition 2.3.2. On dit qu'une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$ -modules finis est paramétrée pour les caractères (ρ, μ, λ) lorsque l'ordre $\ell^{x_\varphi(n)}$ de la φ -composante de X_n est asymptotiquement donnée par la formule :

$$\begin{aligned} x_\varphi(n) &\approx \langle \rho, \varphi \rangle (n+1) \ell^n + \langle \mu, \varphi \rangle \ell^n + \langle \lambda, \varphi \rangle n \\ &= d_\varphi (\rho_\varphi (n+1) \ell^n + \mu_\varphi \ell^n + \lambda_\varphi n), \end{aligned}$$

où le symbole $\approx$ signifie que la différence entre les membres de droite et de gauche est bornée. De plus, on dit qu'elle est strictement paramétrée lorsque la différence est ultimement constante.

2.3.1 Paramètres associés aux extensions cyclotomiques

Soit K_∞/K l'extension cyclotomique de K . Considérons la limite projective $\mathcal{C}' = \varprojlim \mathcal{C}\ell'_n$ des ℓ -groupes des ℓ -classes associés aux étages finis K_n de la tour cyclotomique, il s'identifie ainsi au groupe de Galois $\text{Gal}(C'_\infty/K_\infty)$ de la ℓ -extension abélienne non ramifiée ℓ -décomposée maximale du corps K_∞ . $\mathcal{C}'$ est un Λ -module noethérien et de torsion, de paramètres μ' et λ' . Sous la conjecture de Gross-Kuz'min, les quotients

$$\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{K_n} = \mathcal{C}'/\mathcal{C}'^{\omega_n}$$

sont finis, et donc [Jau86, Prop. IV.1.18] il existe un caractère ℓ -adique virtuel ν' , tel que la suite de $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$ -modules $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit paramétrée par les caractères $\rho' = 0$, μ' , λ' et ν' . Cette dernière affirmation n'est que le Théorème 2.1.1. Donc il est naturel de comparer les paramètres associés aux ℓ -groupes des ℓ -classes $\mathcal{C}\ell'_n$ avec ceux des ℓ -groupes des classes logarithmiques $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{K_n}$ associés aux étages finis de la tour cyclotomique K_∞/K .

Nous savons que le ℓ -groupe des ℓ -classes $\mathcal{C}\ell'$ d'un corps de nombres K est le quotient du ℓ -groupe des classes de diviseurs au sens ordinaire $\mathcal{C}\ell$, par le sous-groupe $\mathcal{C}\ell^{[\ell]}$ engendré par les classes dans $\mathcal{C}\ell$ des idéaux premiers de K au dessus de ℓ . Il est intéressant d'élargir notre comparaison en considérant les paramètres des ℓ -groupes de classes de diviseurs $\mathcal{C}\ell_n$ associés aux étages finis K_n .

La limite projective $\mathcal{C} = \varprojlim \mathcal{C}\ell_n$ des ℓ -groupes des classes de diviseurs des corps K_n s'identifie au groupe de Galois $\text{Gal}(K_\infty^{\text{nr}}/K_\infty)$ de la ℓ -extension abélienne maximale non ramifiée K_∞^{nr} de la tour K_∞ . Nous savons que $\mathcal{C} = \varprojlim \mathcal{C}\ell$ est un $\Lambda[\Delta]$ -module noethérien et de torsion, qui admet $\mathcal{C}'$ comme quotient, plus précisément que $\mathcal{C}'$ est le quotient de $\mathcal{C}$ par le sous-groupe $\mathcal{C}^{[\ell]} = \varprojlim \mathcal{C}\ell_n^{[\ell]}$ construit sur les places des premiers au-dessus de ℓ .

Soit m le plus grand entier parmi les m_i , $i = 1, \dots, s$; tel que K_{m_i} est le sous-corps de décomposition d'une place $\mathfrak{p}_i|\ell$ dans K_∞/K . On a bien une action de Γ/Γ^{ℓ^m} sur le groupe de diviseurs $D_{K_m}^{[\ell]} = \bigoplus_{\mathfrak{p}|\ell} \mathfrak{p}^{\mathbb{Z}}$ construit sur les places au-dessus de ℓ du corps K_m . Puisqu'on a une surjection $D_{K_m}^{[\ell]} \twoheadrightarrow \mathcal{C}\ell_m^{[\ell]}$ le sous groupe Γ^{ℓ^m} fixe $\mathcal{C}\ell_m^{[\ell]}$. Ainsi le module $\mathcal{C}^{[\ell]} = \varprojlim \mathcal{C}\ell_n^{[\ell]}$ est un Λ -module noethérien et de torsion annulé par $\omega_m = \gamma^{\ell^m} - 1$, et il vient que polynôme minimal $\pi(\gamma - 1)$ de $\mathcal{C}^{[\ell]}$ divise ω_m ; donc il est fait de facteurs irréductibles de ω_m . Il en résulte que les polynômes caractéristiques χ_e et $\chi_{e^{[\ell]}}$ diffèrent seulement par des facteurs cyclotomiques.

Les paramètres du module $\mathcal{C}$ sont donnés par les formules $\rho = 0$, $\mu = \mu'$ et $\lambda = \lambda' + \lambda^{[\ell]}$, où $\lambda^{[\ell]}$ est l'unique paramètre non nul du sous-module $\mathcal{C}^{[\ell]} = \varprojlim \mathcal{C}\ell^{[\ell]}$ qui définit le quotient $\mathcal{C}' = \mathcal{C}/\mathcal{C}^{[\ell]}$.

Le tableau suivant résume la comparaison faite entre les modules considérés et leurs paramètres.

Caractères associés aux suites paramétrées de $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$ -modules finis.				
Modules paramétrés	Définition	Paramètres		
		ρ	λ	μ
$\mathcal{C}\ell'_n$	$\mathcal{C}\ell'_n$ est le ℓ -groupe des ℓ -classes de K_n	0	λ'	μ'
$\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{K_n}$	$\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{K_n}$ est le ℓ -groupe des classes logarithmiques de K_n	0	$\tilde{\lambda} = \lambda'$	$\tilde{\mu} = \mu'$
$\mathcal{C}\ell_n$	$\mathcal{C}\ell_n$ est le ℓ -groupe de classes de diviseurs de K_n	0	$\lambda = \lambda' + \lambda^{[\ell]}$	μ

2.3.2 Paramètres associés aux extensions non-cyclotomiques

Soit K_∞/K une $\mathbb{Z}_\ell$ -extension non cyclotomique de K . Soit $\mathcal{C} = \varprojlim \mathcal{C}\ell$ la limite projective des ℓ -groupes de classes de diviseurs des corps K_n , c'est un Λ -module de torsion qui s'identifie au groupe de Galois $\text{Gal}(K_\infty^{\text{nr}}/K_\infty)$ de la ℓ -extension abélienne maximale non ramifiée K_∞^{nr} de K_∞ , de façon analogue la limite projective $\tilde{\mathcal{C}}^* = \varprojlim \tilde{\mathcal{C}}\ell_{K_n}^*$ des groupes des classes logarithmiques de degré arbitraire des corps K_n , s'identifie au groupe de Galois $\text{Gal}(K_\infty^{\text{lc}}/K_\infty)$ de l'extension abélienne maximale de K qui est totalement décomposée sur K_∞ ; et d'après les propositions 2.2.1 et 2.2.2, il est un Λ -module noethérien et de torsion (sous la conjecture de Gross-Kuz'min), isomorphe à la somme directe du sous-groupe $\tilde{\mathcal{C}} = \varprojlim \tilde{\mathcal{C}}\ell_{K_n}$ et d'un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}_\ell$, c'est à dire $\tilde{\mathcal{C}}^* \simeq \tilde{\mathcal{C}} \oplus \mathbb{Z}_\ell$:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \tilde{\mathcal{C}}^* & & \\
 & \swarrow & \text{---} & \searrow & \\
 K_\infty & & K_\infty^c & & K_\infty^{\text{lc}} \\
 & \swarrow \quad \searrow & & \swarrow \quad \searrow & \\
 & \mathbb{Z}_\ell & & \tilde{\mathcal{C}} & \\
 \uparrow \Gamma & & & & \\
 K & & & &
 \end{array}$$

Les polynômes caractéristiques de ces Λ -modules satisfont

$$\chi_{\tilde{\mathcal{C}}^*} = \chi_{\tilde{\mathcal{C}}} \cdot (\gamma - 1), \quad (2.15)$$

il en résultent les relations suivantes entre leurs paramètres

$$\tilde{\mu}^* = \tilde{\mu} \quad \text{et} \quad \tilde{\lambda}^* = \tilde{\lambda} + 1, \quad (2.16)$$

où $\tilde{\mu}^*$ et $\tilde{\lambda}^*$ (respectivement $\tilde{\mu}$ et $\tilde{\lambda}$) sont les paramètres associés au Λ -module $\tilde{\mathcal{C}}^*$ (respectivement $\tilde{\mathcal{C}}$).

Soient $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$ les places de K au-dessus de ℓ . La suite de ℓ -groupes

$$0 \longrightarrow \tilde{\mathcal{C}}\ell_K^{*[\ell]} \longrightarrow \tilde{\mathcal{C}}\ell_K^* \xrightarrow{\Theta} \mathcal{C}\ell' \longrightarrow 0, \quad (2.17)$$

est exacte, où $\tilde{\mathcal{C}}\ell_K^{*[\ell]}$ est le sous groupe de $\tilde{\mathcal{C}}\ell_K^*$ engendré par les classes des $\mathfrak{p}_i$, $i = 1, \dots, s$; avec

$$\Theta : \sum_{\mathfrak{p}} m_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p} \mapsto \prod_{\mathfrak{p} \nmid \ell} \mathfrak{p}^{m_{\mathfrak{p}}}. \quad (2.18)$$

Remarque: Observons que contrairement à la suite exacte induite par θ dans (1.30) qui a un conoyau, le morphisme Θ est toujours surjectif.

On a aussi la suite exacte suivante par définition

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}\ell_K^{[\ell]} \longrightarrow \mathcal{C}\ell_K \longrightarrow \mathcal{C}\ell'_K \longrightarrow 0, \quad (2.19)$$

rappelons que le groupe $\mathcal{C}\ell'_K$ est précisément le ℓ -sous-groupe de Sylow du quotient du groupe des classes d'idéaux de K par le sous-groupe des classes engendrées par les places $\mathfrak{p}_i$ au-dessus de ℓ .

Comme le système projectif de groupes $(\mathcal{C}\ell_n^{[\ell]})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\widetilde{\mathcal{C}}\ell_n^{*[\ell]})_{n \in \mathbb{N}}$ satisfont la condition de Mittag-Leffler, en prenant la limite projective dans les suites exactes (2.17) et (2.19) on obtient encore des suites exactes et donc on a

$$\mathcal{C}' \simeq \widetilde{\mathcal{C}}^* / \widetilde{\mathcal{C}}^{*[\ell]} \simeq \mathcal{C} / \mathcal{C}^{[\ell]}. \quad (2.20)$$

Dénotons par μ, λ et ν (respectivement μ', λ' et ν' ; et $\widetilde{\mu}^*, \widetilde{\lambda}^*$ et $\widetilde{\nu}^*$) les paramètres associés au Λ -module $\mathcal{C}$ (respectivement $\mathcal{C}'$; et $\widetilde{\mathcal{C}}^*$). Les relations suivantes résultent des isomorphismes précédents

$$\widetilde{\mu}^* = \mu' + \widetilde{\mu}^{*[\ell]} \quad \widetilde{\lambda}^* = \lambda' + \widetilde{\lambda}^{*[\ell]} \quad (2.21)$$

$$\mu = \mu' + \mu^{[\ell]} \quad \lambda = \lambda' + \lambda^{[\ell]} \quad (2.22)$$

avec $\mu^{[\ell]}$ et $\lambda^{[\ell]}$ (respectivement $\widetilde{\mu}^{*[\ell]}$ et $\widetilde{\lambda}^{*[\ell]}$) comme les paramètres associés à $\mathcal{C}^{[\ell]}$ (respectivement $\widetilde{\mathcal{C}}^{*[\ell]}$).

La définition suivante, une fois vérifiée pour toutes les places sauvages nous permet d'avoir un certain contrôle sur les polynômes caractéristiques des modules considérés.

Définition 2.3.3. Soit K_∞/K une $\mathbb{Z}_\ell$ -extension. On dit qu'une place $\mathfrak{p}$ de K est finiment décomposée dans la tour K_∞/K , lorsque son groupe de décomposition dans $\text{Gal}(K_\infty/K)$ est ouvert, c'est à dire, lorsqu'il existe un entier $n_{\mathfrak{p}}$ tel que l'étage $K_{n_{\mathfrak{p}}}$ correspond au sous-corps de décomposition de $\mathfrak{p}$ dans K_∞/K .

Remarque: Dans une $\mathbb{Z}_\ell$ -extension cyclotomique toutes les places au-dessus de ℓ vérifient la définition ci-dessus, c'est dû au fait qu'à partir d'un certain étage toutes les places sont totalement ramifiées.

Avec les notations précédentes (2.16), (2.21) et (2.22), on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème 2.3.1. Soit K_∞/K une $\mathbb{Z}_\ell$ -extension non-cyclotomique. Supposons que les places au-dessus de ℓ sont finiment décomposées dans la tour K_∞/K . Alors les caractères associés aux suites des groupes de classes classiques $(\mathcal{C}\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et logarithmiques $(\widetilde{\mathcal{C}}\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$ le long de K_∞/K satisfont les relations suivantes :

$$\rho = \widetilde{\rho} = 0, \quad \mu = \widetilde{\mu} \quad \text{et} \quad \lambda \text{ peut différer de } \widetilde{\lambda};$$

c'est à dire, les polynômes caractéristiques des Λ -modules $\mathcal{C}$ et $\widetilde{\mathcal{C}}$ ne diffèrent que par des facteurs cyclotomiques.

Preuve : La première relation est claire étant donné que les Λ -modules $\mathcal{C}$ et $\widetilde{\mathcal{C}}$ sont de torsion.

Soit D_i le sous-groupe de décomposition de la place sauvage $\mathfrak{p}_i$ dans l'extension K_∞/K . Les groupes D_i étant ouverts sont isomorphes à $\Gamma^{\ell^{m_i}}$ pour un certain m_i . Prenons $m = \max_{1 \leq i \leq s} \{m_i\}$, alors Γ^{ℓ^m} agit trivialement sur $\mathcal{C}^{[\ell]}$ et $\widetilde{\mathcal{C}}^{*[\ell]}$; en conséquence ces modules sont annulés par $\omega_m = \gamma^{\ell^m} - 1$ qui se décompose en facteurs cyclotomiques :

$$\omega_m = \omega_0 \frac{\omega_1}{\omega_0} \frac{\omega_2}{\omega_1} \dots \frac{\omega_m}{\omega_{m-1}}.$$

Puisque le polynôme minimal d'un Λ -module de torsion a les mêmes facteurs que son polynôme caractéristique, les polynômes caractéristiques de $\mathcal{C}$ et $\widetilde{\mathcal{C}}^{*[\ell]}$ ne diffèrent que par des facteurs

cyclotomiques. En particulier ils ont le même μ invariant (2.21) (2.22). Enfin de l'équation (2.16) on en tire le reste de l'énoncé. $\square$

Le tableau suivant résume la comparaison faite entre les modules considérés et leurs paramètres.

Caractères associés aux suites paramétrées de $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$ -modules finis.				
Modules paramétrés	Définition	Paramètres		
		ρ	λ	μ
Cl'_n	Cl'_n est le ℓ -groupe des ℓ -classes de K_n	0	λ'	μ'
$\widetilde{Cl}_n$	$\widetilde{Cl}_n$ est le ℓ -groupe des classes logarithmiques de K_n	0	$\tilde{\lambda} = \lambda' + \tilde{\lambda}^{*[\ell]} - 1$	$\tilde{\mu} = \mu'$
Cl_n	Cl_n est le ℓ -groupe de classes de diviseurs de K_n	0	$\lambda = \lambda' + \lambda^{[\ell]}$	μ'

En suite, on donne un exemple dans lequel le théorème précédent s'applique.

Exemple 2.3.1. Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ un corps de nombres quadratique imaginaire et soit ℓ un nombre premier qui se décompose en K , disons $(\ell) = \tilde{\ell}\ell$.

Supposons que ℓ est étranger au nombre de classes de K , donc la ℓ -extension maximale abélienne ℓ -ramifiée M_ℓ est une $\mathbb{Z}_\ell$ -extension, et celle ci est différente de l'extension cyclotomique. En particulier, comme $K/\mathbb{Q}$ est abélienne, le Théorème 2.2.2 nous dit qu'au moins une place se ramifie logarithmiquement, on peut donc appliquer les résultats de cette section.

Enfin, l'image du groupe de décomposition $D_{\tilde{\ell}}$ dans $\text{Gal}(M_\ell/K)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}_\ell$. Donc on conclut que les deux places sauvages sont finiment décomposées. $\blacklozenge$

2.4 Appendice : Calculs explicites des invariants $\tilde{\mu}$ et $\tilde{\lambda}$

Dans cette section on s'intéresse au calcul explicite des invariants $\tilde{\mu}$ et $\tilde{\lambda}$ pour quelques exemples numériques.

2.4.1 Le cas cyclotomique

D'abord on déduit un résultat logarithmique d'un célèbre théorème classique.

Théorème 2.4.1 (Théorème de Ferrero-Washington logarithmique). *Soit K un corps de nombres abélien sur $\mathbb{Q}$ et soit K^c/K la $\mathbb{Z}_\ell$ -extension cyclotomique de K . Alors*

$$\tilde{\mu} = 0.$$

Preuve : D'après la Section 2.3.1 on a $\mu = \mu' = \tilde{\mu}$, le résultat en découle du théorème classique de Ferrero-Washington. $\square$

Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ un corps quadratique imaginaire. Puisque l'extension $K/\mathbb{Q}$ est abélienne, par le théorème logarithmique de Ferrero-Washington on a $\tilde{\mu} = 0$.

Rappelons le résultat suivant de Gold :

Théorème 2.4.2 ([Gol75b]). Soit K un corps quadratique imaginaire et soit K_n le n -ième étage de son $\mathbb{Z}_\ell$ -extension cyclotomique. Soit e'_n l'exposant de l'ordre du ℓ -groupe des ℓ -classes Cl'_n associé à K_n . S'il existe $n \geq 1$, tel que $e'_n - e'_{n-1} < \varphi(\ell^n)$, alors

$$\lambda' = e'_n - e'_{n-1}.$$

Dans l'exemple qui suit on calcule le groupe des classes logarithmiques pour les étages K , K_1 et K_2 de la tour $\mathbb{Z}_3$ -cyclotomique de corps de nombres quadratiques imaginaires $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ pour $-100 \leq d \leq -1$.

Le code qu'on utilise dans PARI/GP est :

```
{
for(d=-100,-1,
if(!issquarefree(d),next);
K=bnfinit(x^2-d,1);
Cl=bnflog(K,3);
if(!Cl,next);
e0=sum(n=1,#Cl[3],valuation(Cl[3][n],3));
T=polcompositum(K.pol,polsubcyclo(9,3))[1];
E=bnfinit(nfinit([T.pol,10^5]),1);
Cl1=bnflog(E,3);
e1=sum(n=1,#Cl1[3],valuation(Cl1[3][n],3));
e1t=sum(n=1,#Cl1[1],valuation(Cl1[1][n],3));
T=polcompositum(K.pol,polsubcyclo(27,9))[1];
E=bnfinit(nfinit([T.pol,10^5]),1);
Cl2=bnflog(E,3);
e2=sum(n=1,#Cl2[3],valuation(Cl2[3][n],3));
if(e1-e0<eulerphi(3),lat=e1-e0,if(e2-e1<eulerphi(9),lat=e2-e1,error("not enough")));
print(d,Cl[1],Cl[3],Cl1[1],Cl1[3],Cl2[1],Cl2[3],e1-e0,e2-e1,lat,e1t-lat);
);
}
```

On obtient le tableau suivant :

	$\mathbb{Q}(\sqrt{d})$		$\mathbb{Q}(\sqrt{d}, \cos(2\pi/9))$		$\mathbb{Q}(\sqrt{d}, \cos(2\pi/27))$		$\varphi(3) = 2$	$\varphi(9) = 6$	$\tilde{\mu} = 0$	
d	$\tilde{Cl}_K$	Cl'_K	$\tilde{Cl}_{K_1}$	Cl'_{K_1}	$\tilde{Cl}_{K_2}$	Cl'_{K_2}	$e'_1 - e'_0$	$e'_2 - e'_1$	$\tilde{\lambda}$	$\tilde{\nu}$
-87	[3]	[3]	[9]	[9]	[27]	[27]	1	1	1	1
-86	[3]	[]	[9, 9]	[9, 3]	[27, 27]	[27, 9]	3	2	2	2
-74	[9]	[]	[27]	[3]	[81]	[9]	1	1	1	2
-65	[3]	[]	[9]	[3]	[27]	[9]	1	1	1	1
-61	[3]	[3]	[9]	[9]	[27]	[27]	1	1	1	1
-47	[9]	[]	[27]	[3]	[81]	[9]	1	1	1	2
-41	[27]	[]	[81, 3]	[3, 3]	[243, 9]	[9, 9]	2	2	2	3
-35	[3]	[]	[9]	[3]	[27]	[9]	1	1	1	1
-31	[3]	[3]	[9]	[9]	[27]	[27]	1	1	1	1
-14	[3]	[]	[9]	[3]	[27]	[9]	1	1	1	1

Avec une procédure similaire on calcule le groupe des classes logarithmiques pour les étages K et K_1 des tours $\mathbb{Z}_5$ -cyclotomique et $\mathbb{Z}_7$ -cyclotomique de corps de nombres quadratiques imaginaires $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ pour $-100 \leq d \leq -1$. Dans tous les cas considérés il suffit de calculer Cl_K et Cl_{K_1} pour déterminer les invariants d'Iwasawa logarithmiques. Les tableaux suivants montrent les résultats de ces calculs.

Cas $\ell = 5$

	$K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$		K_1		$\varphi(5) = 4$	$\tilde{\mu} = 0$	
d	$\widetilde{\text{Cl}}_K$	Cl'_K	$\widetilde{\text{Cl}}_{K_1}$	Cl'_{K_1}	$e'_1 - e'_0$	$\tilde{\lambda}$	$\tilde{\nu}$
-51	[125]	[]	[625]	[5]	1	1	3
-47	[5]	[5]	[25]	[25]	1	1	1
-41	[5]	[]	[25]	[5]	1	1	1
-34	[5]	[]	[25]	[5]	1	1	1
-26	[5]	[]	[25]	[5]	1	1	1
-11	[5]	[]	[25]	[5]	1	1	1

Cas $\ell = 7$

	$K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$		K_1		$\varphi(7) = 6$	$\tilde{\mu} = 0$	
d	$\widetilde{\text{Cl}}_K$	Cl'_K	$\widetilde{\text{Cl}}_{K_1}$	Cl'_{K_1}	$e'_1 - e'_0$	$\tilde{\lambda}$	$\tilde{\nu}$
-89	[7]	[]	[49]	[7]	1	1	1
-73	[7]	[]	[49]	[7]	1	1	1
-71	[7]	[7]	[49]	[49]	1	1	1
-34	[7]	[]	[49]	[7]	1	1	1

2.4.2 Le cas non-cyclotomique

Cette section vise à comparer les invariants classiques et logarithmiques pour certaines extensions, on calcul tout simplement les groupes de classes logarithmiques pour certains cas étudiés par Hubbard et Washington [HW17].

Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ et $\ell = 3$. Soit K_∞ la $\mathbb{Z}_\ell$ -extension non-cyclotomique de K . Soit K_1 l'unique sous-corps de K_∞ tel que K_1/K est une extension cyclique d'ordre 3, alors $K_1 = K(\sqrt[3]{3})$. L'extension $L = \mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt[3]{d})$ est une extension de degré 3 de K tel que

$$L_n = LK_n,$$

et alors L_∞/L est une $\mathbb{Z}_\ell$ -extension qui n'est pas cyclotomique.

Les exemples du tableau suivant satisfont les hypothèses nécessaires de décomposition pour qu'on puisse appliquer le Théorème 2.3.1, car toutes les places de L au-dessus de 3 se ramifient complètement et donc sont finiment décomposées.

	$L_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt[3]{d})$		L_1		Invariants				
d	$\widetilde{Cl}_K$	Cl'_K	$\widetilde{Cl}_{K_1}$	Cl'_{K_1}	$\mu = \tilde{\mu}$	$\tilde{\lambda}$	$\tilde{\nu}$	λ	ν
10	$[\]$	$[\]$	$[3, 3, 3]$	$[3, 3]$	1	1	-1	0	-1
22	$[3]$	$[3]$	$[3, 3, 3]$	$[3, 3, 3]$	1	0	0	0	1
34	$[3]$	$[3]$	$[3, 3, 3]$	$[3, 3, 3]$	1	0	0	0	1
44	$[\]$	$[\]$	$[9, 3, 3]$	$[3, 3]$	1	2	-1	0	-1
46	$[\]$	$[\]$	$[3, 3, 3]$	$[3, 3]$	1	1	-1	0	-1
58	$[3]$	$[3]$	$[3, 3, 3]$	$[3, 3, 3]$	1	0	0	0	1
68	$[3]$	$[3]$	$[3, 3, 3]$	$[3, 3, 3]$	1	0	0	0	1
85	$[3]$	$[3]$	$[3, 3, 3]$	$[3, 3, 3]$	1	0	0	0	1
92	$[3]$	$[3]$	$[3, 3, 3]$	$[3, 3, 3]$	1	0	0	0	1
110	$[3, 3, 3]$	$[3, 3, 3]$	$[3, 3, 3, 3, 3, 3, 3]$	$[3, 3, 3, 3, 3, 3, 3]$	2	0	1	0	2
164	$[3]$	$[3]$	$[3, 3, 3]$	$[3, 3, 3]$	1	0	0	0	1
170	$[3]$	$[3]$	$[3, 3, 3, 3, 3]$	$[3, 3, 3, 3, 3]$	2	0	-1	0	0
230	$[3, 3, 3]$	$[3, 3, 3]$	$[3, 3, 3, 3, 3, 3, 3]$	$[3, 3, 3, 3, 3, 3, 3]$	2	0	1	0	2
236	$[3]$	$[3]$	$[3, 3, 3]$	$[3, 3, 3]$	1	0	0	0	1
253	$[\]$	$[\]$	$[3, 3, 3]$	$[3, 3]$	1	1	-1	0	-1

Chapitre 3

Modules d'Iwasawa Logarithmiques pour des $\mathbb{Z}_\ell^d$ -extensions

On ne peut étudier que ce qu'on a
d'abord rêvé.

Gaston Bachelard

Il est naturel de considérer le compositum de diverses $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions. La conjecture de Leopoldt affirme qu'il existent $c + 1$ telles extensions linéairement indépendantes sur un corps de nombres avec c plongements complexes. Donc le compositum K_d de d telles $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions est galoisien et son groupe de Galois Γ_d est isomorphe à d copies de $\mathbb{Z}_\ell$.

Greenberg a commencé l'étude des $\mathbb{Z}_\ell^d$ -extensions influencé par les travaux d'Iwasawa [Gre73]. Dans son travail de thèse il démontre que le groupe de Galois de la ℓ -extension abélienne maximale de K_d est un module noethérien et de torsion sur l'algèbre d'Iwasawa Λ_d du groupe Γ_d . Ce résultat généralise les résultats d'Iwasawa pour $d = 1$. Il est donc naturel de se demander si un tel résultat est vrai pour le groupe de Galois associé à l'extension abélienne maximale logarithmiquement non-ramifiée de K_d .

On démontre que le groupe de Galois de l'extension maximale abélienne logarithmiquement non-ramifiée de K_d est en effet un Λ_d -module noethérien et de torsion, bien sûr, en supposant que la conjecture de Gross-Kuz'min est vraie pour tous les corps dans l'extension K_d/K .

Dans le travail de Greenberg, on équipe d'une topologie l'ensemble des $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions différentes d'un corps de nombres, avec cette topologie l'espace est compact. La partie composée des $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions pour lesquelles toutes les places de K au-dessus de ℓ elles sont finiment décomposées, est dense dans l'espace mentionné. Ainsi Greenberg, en considérant le compositum K_d de $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions, déduit des propriétés sur les invariants μ et λ des $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions dans un voisinage d'une $\mathbb{Z}_\ell$ -extension K_∞ .

Comme on a vu dans le chapitre précédent, ces résultats peuvent être appliqués directement sur l'invariant $\tilde{\mu}$ du groupe de classes logarithmiques puisque $\mu(K_\infty) = \tilde{\mu}(K_\infty)$, par contre ceci n'est plus vraie pour les invariants λ et $\tilde{\lambda}$. Néanmoins, quand l'invariant $\mu(K_\infty) = \tilde{\mu}(K_\infty) = 0$, on obtient aussi des résultats analogues à ceux de Greenberg pour les invariants $\tilde{\lambda}$.

La dernière section de ce chapitre porte sur l'étude du groupe de classes logarithmiques le long de la suite des corps $K_n = K_d^{\Gamma_d^{t^n}}$ dans un compositum K_d de $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions. Dans le travail de Cuoco et Monsky [CM81], ils réussissent à trouver une formule pour cet effet dans le cas classique

pour n'importe quel compositum K_d . Pour cela ils développent la théorie des $\mathcal{S}$ -structures pour des Λ_d -modules noethériens et de torsion.

On démontre, pour $d \geq 2$ et sur l'hypothèse que le compositum K_d contient que des extensions non-cyclotomiques, que l'on peut appliquer la théorie des $\mathcal{S}$ -structures à la suite $K_n^c = K_d^c \Gamma_d^{\ell^n}$ d'extensions cyclotomiques des corps K_n . En conséquence, on obtient qu'il existe des entiers $\tilde{\mu}_d$, $\tilde{\lambda}_d$, tels que l'exposant $\tilde{e}_n(K_d/K)$ de l'ordre $|\tilde{C}_n|$ du groupe de classes logarithmiques attaché à l'étage $K_n = K_d^{\Gamma_d^{\ell^n}}$ est donné par la formule

$$\tilde{e}_n(K_d/K) = (\tilde{\mu}_d^{\ell^n} + \tilde{\lambda}_d n + O(1)) \ell^{(d-1)n},$$

pour n suffisamment grand.

3.1 $\mathbb{Z}_\ell^d$ -extensions

Soit K un corps de nombres et ℓ un nombre premier. Nous écrivons K_d l'extension composée des $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions différentes de K , comme telle K_d est une extension de Galois avec $\text{Gal}(K_d/K) \simeq \mathbb{Z}_\ell^d$ pour un entier d tel que $c+1 \leq d \leq n$; ici c est le nombre de plongements complexes et n est le degré $[K:\mathbb{Q}]$ de l'extension $K/\mathbb{Q}$. La conjecture de Leopoldt affirme que $d = c + 1$, cependant en ce qui suit la vraie valeur de d n'est pas nécessaire.

Le groupe de Galois $\Gamma_d = \text{Gal}(K_d/K)$ est un groupe topologique avec la topologie produit induite des $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions. Prenons des générateurs $\gamma_1, \dots, \gamma_d$, on définit l'algèbre d'Iwasawa Λ_d de façon analogue au cas $d = 1$ comme l'algèbre de groupe $\mathbb{Z}_\ell[[\Gamma_d]]$, limite projective des quotients finis de Γ_d sur $\mathbb{Z}_\ell$. Ainsi l'isomorphisme entre l'algèbre d'Iwasawa Λ_d et l'anneau $\mathbb{Z}_\ell[[T_1, \dots, T_d]]$ des séries formelles dans $T_1, \dots, T_d$ variables sur $\mathbb{Z}_\ell$ est obtenu par exemple via l'application $T_i \mapsto \gamma_i - 1$ pour $i = 1, \dots, d$. Le module Λ_d est un anneau régulier de dimension $d + 1$. En particulier, c'est un anneau factoriel. On dénote $\mathfrak{M}$ l'idéal maximal de Λ_d .

Exemple 3.1.1. Soit K un corps quadratique imaginaire, la ℓ -extension maximale abélienne ℓ -ramifiée M_ℓ de K a pour groupe de Galois le produit d'un groupe fini et de $\mathbb{Z}_\ell^2$. En particulier, si le nombre de classes de K est étranger à ℓ , le groupe de Galois $\text{Gal}(M/K)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}_\ell^2$ et contient l'extension cyclotomique ainsi que la $\mathbb{Z}_\ell$ -extension pro-diédrale de K (aussi appelée anti-cyclotomique). $\blacklozenge$

Soit Δ l'ensemble de toutes les $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions de K , on peut équiper Δ de la topologie induite par la limite projective $\Delta = \varprojlim \Delta_n$ par les applications naturelles $\Delta_m \rightarrow \Delta_n$ pour $m \geq n$ où Δ_n est équipé de la topologie discrète et consiste de toutes les extensions cycliques de K de degré ℓ^n contenues dans une $\mathbb{Z}_\ell$ -extension K_∞ de K . Avec cette topologie Δ est un espace topologique compact et Hausdorff.

Pour $K_\infty \in \Delta$ et $n \geq 0$ les ensembles

$$\Delta(K_\infty, n) = \{K'_\infty \in \Delta \mid [K_\infty \cap K'_\infty : K] \geq \ell^n\}$$

forment une base pour la topologie précédente.

Pour toute $\mathbb{Z}_\ell$ -extension K_∞ de K , il existe un épimorphisme d'algèbres d'Iwasawa $\Lambda_d \rightarrow \Lambda_{K_\infty}$ avec ici Λ_{K_∞} l'algèbre d'Iwasawa de l'extension K_∞/K . Si l'on dénote $\mathfrak{A}_{K_\infty}$ le noyau de ce morphisme on a $\Lambda_d/\mathfrak{A}_{K_\infty} \simeq \Lambda_{K_\infty}$. Pour tout Λ_d -module noethérien et de torsion Y , le quotient $Y/\mathfrak{A}_{K_\infty} Y$ est clairement un Λ_{K_∞} -module noethérien, de plus il est de torsion si et seulement s'il existe $f \in \Lambda_d$, $f \notin \mathfrak{A}_{K_\infty}$ tel que $fY = 0$ [Gre73].

La partie $\Delta(Y)$ qui consiste des $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions K_∞ telles que $Y/\mathfrak{A}_{K_\infty}Y$ est un Λ_{K_∞} -module noethérien de torsion, est ouverte dans Δ [Gre73, Prop. 1]. En d'autres mots si $\text{Ann}(Y) = \{f \in \Lambda_d \mid fY = 0\}$ on a que $\Delta(Y) = \{K_\infty \in \Delta \mid \text{Ann}(Y) \not\subseteq \mathfrak{A}_{K_\infty}\}$. C'est à dire l'égalité $\Delta(Y) = \Delta$ peut être en défaut, par exemple quand $Y = \Lambda_d/(f)$ pour $f \in \mathfrak{A}_{K_\infty}$ pour quelque $\mathbb{Z}_\ell$ -extension K_∞ .

Donc, en fixant un Λ_d -module Y noethérien et de torsion, chaque $\mathbb{Z}_\ell$ -extension K_∞ dans $\Delta(Y)$ donne lieu à un Λ_{K_∞} -module $Y/\mathfrak{A}_{K_\infty}Y$ noethérien et de torsion pour lequel on peut considérer ses invariants $\mu(K_\infty)$ et $\lambda(K_\infty)$. Nous sommes intéressés en l'étude de ces invariants quand Y provient du contexte logarithmique.

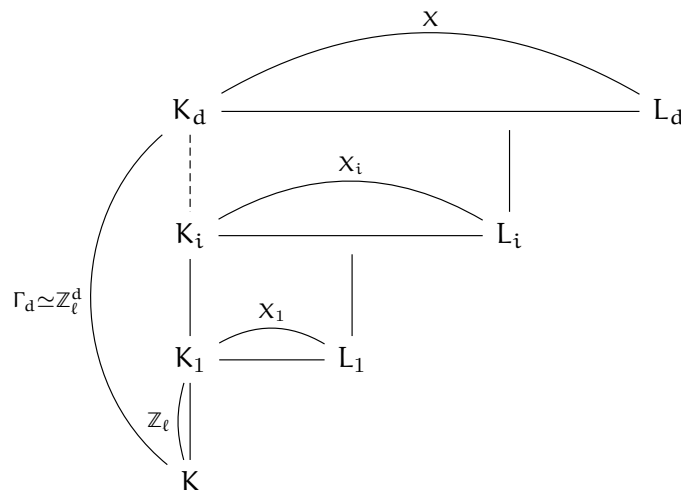
3.2 Le module logarithmique

Soit L_d la ℓ -extension maximale abélienne logarithmiquement non-ramifiée de K_d , soit $X = \text{Gal}(L_d/K_d)$ et dénotons G le groupe de Galois $\text{Gal}(L_d/K)$. Puisque X est un sous-groupe normal abélien de G on peut définir une action de Γ_d sur X , aussi X est un $\mathbb{Z}_\ell$ -module compact, donc on peut regarder X comme un Λ_d -module.

On sait que pour $d = 1$ le module X est noethérien et de torsion (sous la conjecture de Gross-Kuz'min). On s'attend à que ce soit vrai aussi dans le cas $d \geq 2$. En fait ceci est vrai et on le démontre avec un argument de récurrence dans le théorème qui suit :

Théorème 3.2.1. *Sous la conjecture de Gross-Kuz'min X est un Λ_d -module noethérien et de torsion.*

Preuve : Soit K_1 une $\mathbb{Z}_\ell$ -extension de K . Soit K_2 un sous-corps de K_d contenant K_1 tel que $\text{Gal}(K_2/K) \simeq \mathbb{Z}_\ell^2$. On continue de façon récurrente pour avoir $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \dots \subset K_d$ et $\text{Gal}(K_i/K) \simeq \mathbb{Z}_\ell^i$. Soit L_i la ℓ -extension abélienne maximale logarithmiquement non-ramifiée de K_i et $X_i = \text{Gal}(L_i/K_i)$.



Dénotons par Λ_i l'algèbre d'Iwasawa de $\text{Gal}(K_i/K)$ sur $\mathbb{Z}_\ell$.

On veut montrer que X_i est un Λ_i -module noethérien et de torsion. On sait que X_1 est un Λ_1 -module noethérien et de torsion. Supposons que X_{i-1} est un Λ_{i-1} -module noethérien et de torsion. Il existe un épimorphisme d'algèbres $\varepsilon : \Lambda_i \rightarrow \Lambda_{i-1}$ induit par la restriction $\text{Gal}(K_i/K) \rightarrow \text{Gal}(K_{i-1}/K)$. Or si l'on prend γ_i un générateur de $\text{Gal}(K_i/K_{i-1}) \subseteq \text{Gal}(K_i/K)$, alors l'idéal d'augmentation du morphisme ε est engendré par $\gamma_i - 1$.

Soit L'_{i-1} l'extension maximale abélienne de K_{i-1} contenue dans L_i , c'est à dire l'extension fixé par le sous-groupe dérivé $X_i^{(\gamma_i-1)}$ de $\text{Gal}(L_i/K_{i-1})$, en conséquence on obtient l'isomorphisme $\text{Gal}(L'_{i-1}/K_i) = \text{Gal}(L_i/K_{i-1})/X_i^{(\gamma_i-1)}$. Or soit $\mathfrak{p}$ une place de K_{i-1} au-dessus de ℓ . On dénote $\tilde{I}_{\mathfrak{p}}$ son groupe d'inertie logarithmique dans $\text{Gal}(L'_{i-1}/K_{i-1})$. Le groupe $\tilde{I}_{\mathfrak{p}}$ est isomorphe à un sous-groupe de $\text{Gal}(K_i/K_{i-1}) \simeq \mathbb{Z}_{\ell}$ puisque L'_{i-1}/K_i est logarithmiquement non-ramifiée. Soit $\tilde{T} = \prod_{\mathfrak{p}|\ell} \tilde{I}_{\mathfrak{p}}$ le Λ_{i-1} -sous-module du Λ -module $\text{Gal}(L_{i-1}/K_{i-1})$, c'est à dire le sous-module engendré par les sous-groupes d'inertie logarithmique des places au-dessus de ℓ .

D'abord on démontre que $\tilde{T}$ est un Λ_{i-1} -module noethérien et de torsion. D'après la remarque qui suit la Définition 2.3.3, il existe un nombre fini de places dans K_1 au-dessus de ℓ , donc un nombre fini de classes de places $\mathfrak{p} \in \text{Pl}_{K_{i-1}}$ conjuguées (ce qui se traduit de même pour les sous-groupes d'inertie logarithmique $\tilde{I}_{\mathfrak{p}}$) par l'action de $\text{Gal}(K_{i-1}/K_1)$ sur $\text{Gal}(L'_{i-1}/K_{i-1})$. L'algèbre d'Iwasawa R de $\text{Gal}(K_{i-1}/K_1)$ est un sous-algèbre de l'algèbre d'Iwasawa Λ_{i-1} , par conséquent le Λ_{i-1} -sous-module $\tilde{T}$ est aussi un R -sous-module engendré par un nombre fini de sous-groupes d'inertie logarithmique $\tilde{I}_{\mathfrak{p}}$. Alors $\tilde{T}$ est un R -module noethérien, donc un Λ_{i-1} -module noethérien. Il est de torsion, sinon $\tilde{T}$ admettrait un sous-module isomorphe à Λ_{i-1} , cependant tout R -sous-module $\tilde{T}$ est de type fini tandis que Λ_{i-1} ne l'est pas. Ceci démontre que $\tilde{T}$ est un Λ_{i-1} -module noethérien et de torsion.

Le quotient $X_i/X_i^{(\gamma_i-1)}$ est aussi un Λ_{i-1} -module noethérien et de torsion. En fait, le sous-corps de L'_{i-1} qui est fixé par $\tilde{T}$ est logarithmiquement non-ramifié sur K_{i-1} , puis il est contenu dans L_{i-1} . Puisqu'on a supposé que X_{i-1} est un Λ_{i-1} -module noethérien et de torsion, il suit que $\text{Gal}(L'_{i-1}/K_{i-1})$ l'est de même; d'où l'affirmation sur le quotient $X_i/X_i^{(\gamma_i-1)}$.

De l'application ε au-dessus, on obtient que $\Lambda_{i-1} \simeq \Lambda_i/(\gamma_i - 1)\Lambda_i$. Il en résulte que $X_i/X_i^{(\gamma_i-1)}$ est de type fini sur Λ_i , et si $\mathfrak{m}_i$ dénote l'idéal maximal de l'algèbre Λ_i alors $X_i/X_i^{\mathfrak{m}_i}$ est fini. Du théorème de Nakayama pour Λ_i -modules compacts on déduit que X_i est noethérien.

Enfin, on démontre que X_i est de torsion. Soit $f \in \Lambda_i$ tel que $fX_i \subseteq (\gamma_i - 1)X_i$ mais $f_i \notin (\gamma_i - 1)\Lambda_i$. Prenons des générateurs $x_1, \dots, x_n$ de X_i comme Λ_i -module. On a

$$fx_k = \sum_{j=1}^n c_{jk}x_j \quad \text{avec} \quad c_{jk} \in (\gamma_i - 1) \text{ et } k = 1, \dots, n;$$

ce qui donne

$$\sum_{j=1}^n (c_{jk} - \delta_{jk}f)x_k = 0 \quad \text{avec} \quad k = 1, \dots, n;$$

d'ici on obtient que le déterminant $h = \det(c_{jk} - \delta_{jk}f) \in \Lambda_i$ appartient à l'annulateur de X_i . De plus $h \equiv \pm f^n \pmod{(\gamma_i - 1)}$ implique que $h \not\equiv 0 \pmod{(\gamma_i - 1)}$, donc $h \neq 0$ et on a que X_i est un Λ_i -module noethérien et de torsion. $\square$

Notamment on veut appliquer les théorèmes de Greenberg au Λ_d -module logarithmique X . Pour cela on doit restreindre notre intérêt aux $\mathbb{Z}_{\ell}$ -extensions qui satisfont une hypothèse raisonnable de décomposition.

Proposition 3.2.1. *Soit K_{∞} une $\mathbb{Z}_{\ell}$ -extension d'un corps de nombres K dans lequel toutes les places au-dessus de ℓ sont finiment décomposées (voir 2.3.3). Alors sous la conjecture de Gross-Kuz'min $K_{\infty} \in \Delta(X)$.*

Preuve : Il est clair que $X/\mathfrak{A}_{K_{\infty}}X$ est un $\Lambda_{K_{\infty}}$ -module noethérien; donc on doit démontrer que $X/\mathfrak{A}_{K_{\infty}}X$ est de torsion.

Soit $G = \text{Gal}(L_d/K_\infty)$, ainsi $X = \text{Gal}(L_d/K_d) \trianglelefteq G$ est un sous-groupe abélien distingué de G et $G/X \simeq \mathbb{Z}_\ell^{d-1}$. Soit G' le sous-groupe dérivé de G , on va démontrer que la suite

$$0 \longrightarrow G'/\mathfrak{A}_{K_\infty}X \longrightarrow X/\mathfrak{A}_{K_\infty}X \longrightarrow X/G' \longrightarrow 0$$

est exacte et ses termes sont des Λ_{K_∞} -modules noethériens et de torsion.

D'abord observons que $\mathfrak{A}_{K_\infty}X \subseteq G' \subseteq X$. Le quotient $G/X \simeq \mathbb{Z}_\ell^{d-1}$ est abélien alors $G' \subseteq X$. Or, choisissons des générateurs $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_d$ tels que $\gamma_1|_{K_\infty}$ engendre $\text{Gal}(K_\infty/K)$ et $\gamma_2, \dots, \gamma_d \in \text{Gal}(K_d/K_\infty) \simeq G/X$. Posons $T_i = \gamma_i - 1$, on a l'isomorphisme $\Lambda_d \simeq \mathbb{Z}_\ell[[T_1, \dots, T_d]]$ et $\mathfrak{A}_{K_\infty} = (T_2, \dots, T_d)$. Le sous-groupe dérivé G' est stable par l'action de G/X , et on en tire que $\mathfrak{A}_{K_\infty}X \subseteq G'$.

Or, nous allons démontrer que $G'/\mathfrak{A}_{K_\infty}X$ est un $\mathbb{Z}_\ell$ -module de type fini, donc *a fortiori* un Λ_{K_∞} -module de torsion. Le quotient $X/\mathfrak{A}_{K_\infty}X$ est dans le centre de $G/\mathfrak{A}_{K_\infty}X$, en pour $g \in G$ et $x \in X$ on a

$$\begin{aligned} gxg^{-1}x &= \tilde{\gamma}yx\tilde{\gamma}^{-1}x^{-1}, \quad \text{pour } \tilde{\gamma} \in \text{Gal}(K_d/K_\infty) \text{ et } y \in X; \\ &= \tilde{\gamma}x\tilde{\gamma}^{-1}x^{-1}, \quad X \text{ abélien}; \\ &= x^{\tilde{\gamma}-1} \in \mathfrak{A}_{K_\infty}X. \end{aligned}$$

Il suit que tout sous-groupe de $X/\mathfrak{A}_{K_\infty}X$ est distingué dans $G/\mathfrak{A}_{K_\infty}X$. Soient $\sigma_2, \dots, \sigma_d \in G/\mathfrak{A}_{K_\infty}X$ tels que leurs images engendrent $G/X \simeq \mathbb{Z}_\ell^{d-1}$ topologiquement. Soit $D = \langle [\sigma_i, \sigma_j], i, j = 2, \dots, d \rangle$ le sous-groupe de $G/\mathfrak{A}_{K_\infty}X$, donc $D \subseteq G'/\mathfrak{A}_{K_\infty}X \subseteq X/\mathfrak{A}_{K_\infty}X$ donc D est distingué dans $G/\mathfrak{A}_{K_\infty}X$. Considérons le quotient $(G/\mathfrak{A}_{K_\infty}X)/D$, il est engendré par $X/\mathfrak{A}_{K_\infty}X = \ker(G/\mathfrak{A}_{K_\infty}X \rightarrow G/X)$ et $\{\sigma_i \bmod D \mid i = 2, \dots, d\}$ donc ses éléments commutent et en conséquence $(G/\mathfrak{A}_{K_\infty}X)/D$ est abélien, d'où il suit que $D = G'/\mathfrak{A}_{K_\infty}X$. Il en résulte que $G'/\mathfrak{A}_{K_\infty}X$ est un $\mathbb{Z}_\ell$ -module de type fini.

En suite nous démontrons que le Λ_{K_∞} -module G/G' est de torsion. Soient $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$ les places K_∞ au-dessus de ℓ et soient $\tilde{I}_1, \dots, \tilde{I}_s$ leurs groupes d'inertie logarithmique dans l'extension maximale abélienne de K_∞ contenue dans L_∞ . Soit $T = \tilde{I}_1\tilde{I}_2 \cdots \tilde{I}_s \subseteq G/G'$. Comme les $\tilde{I}_i$ rencontrent trivialement X/G' pour $i = 1, \dots, s$; T est un sous-groupe de $\text{Gal}(K_d/K_i) \simeq \mathbb{Z}_\ell^{d-1}$, il est un $\mathbb{Z}_\ell$ -module de type fini. Il suit que T est un Λ_{K_∞} -sous-module de G/G' et donc de torsion. L'extension L_∞ de K_∞ qui est fixée par T est par conséquence la ℓ -extension maximale abélienne logarithmiquement non-ramifiée de K_∞ . D'où $(G/G')/T \simeq \text{Gal}(L_\infty/K_\infty)$. Sous la conjecture de Gross-Kuz'min le Λ_{K_∞} -module $\text{Gal}(L_\infty/K_\infty)$ est de torsion (2.2.1). On en tire que G/G' est de torsion et par conséquence X/G' aussi. $\square$

Soit Δ^0 l'ensemble des $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions d'un corps de nombres K pour lesquelles toutes les places de K au-dessus de ℓ sont finiment décomposées (2.3.3). La proposition précédente affirme que $\Delta^0 \subseteq \Delta(X)$. Il résulte que Δ^0 est ouvert et dense dans Δ [Gre73, Prop. 3]. En ce qui suit on va considérer que des $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions K_∞ dans Δ^0 .

Il existent des exemples pour lesquels $\Delta^0 = \Delta(X) = \Delta$:

Exemple 3.2.1. Supposons que K a une seule place $\mathfrak{p}$ au-dessus de ℓ . On sait que cette place ramifie au sens classique dans toute $\mathbb{Z}_\ell$ -extension K_∞ de K . Donc, le groupe de décomposition est d'indice fini et on a alors l'égalité. $\blacklozenge$

Exemple 3.2.2. Soit K un corps quadratique imaginaire et ℓ un nombre premier qui se décompose en K . D'après l'Exemple 2.3.1, les deux places au-dessus de ℓ sont finiment décomposées dans l'extension pro-driédale de K et il est de même dans l'extension cyclotomique. $\blacklozenge$

Remarque: Il est facile de construire des exemples pour lesquels Δ^0 est strictement contenu dans Δ . Supposons que ℓ se décompose complètement dans K , avec $[K : \mathbb{Q}] = r + 2c$ et $c \geq 2$. Les complétés ℓ -adiques $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}_i}$ pour $\pi|\ell$ sont des $\mathbb{Z}_\ell$ -modules de rang 2 ; donc leurs images dans $\text{Gal}(K_d/K) \simeq \mathbb{Z}_\ell^d$ sont des $\mathbb{Z}_\ell$ -modules de rang ≤ 2 . Donc il existe une $\mathbb{Z}_\ell$ -extension K_∞ de K pour laquelle le groupe de décomposition d'une place π est trivial, c'est à dire $K_\infty \notin \Delta^0$.

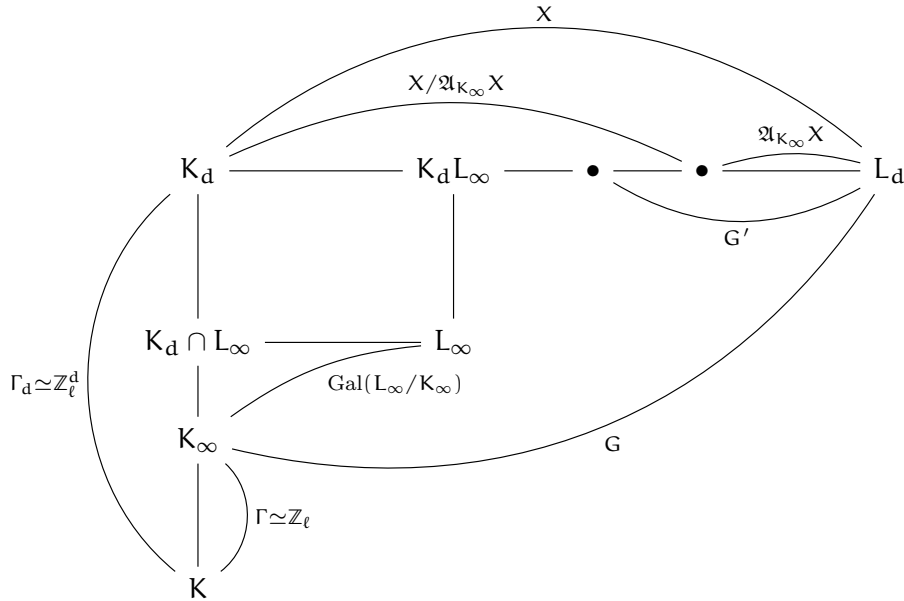
3.3 Les Invariants $\tilde{\mu}$ et $\tilde{\lambda}$

Soit $K_\infty \in \Delta^0$. Soit L_∞ la ℓ -extension maximale abélienne logarithmiquement non-ramifiée de K_∞ . Le groupe de Galois $\text{Gal}(L_\infty/K_\infty)$ est un Λ_{K_∞} -module et sous la conjecture de Gross-Kuz'min de torsion 2.2.1. On dénote $\tilde{\mu}(K_\infty)$ et $\tilde{\lambda}(K_\infty)$ les invariants structurels (2.13) attachés au module d'origine logarithmique $\text{Gal}(L_\infty/K_\infty)$.

Le compositum $K_d L_\infty$ est une sous-extension de L_d . Considérons l'épimorphisme

$$X = \text{Gal}(L_d/K_d) \xrightarrow{\varphi} \text{Gal}(K_d L_\infty/K_d),$$

comme $\mathfrak{A}_{K_\infty} X \subseteq \ker \varphi$ on a l'épimorphisme induit de Λ_{K_∞} -modules $X/\mathfrak{A}_{K_\infty} X \rightarrow \text{Gal}(K_d L_\infty/K_d) \simeq \text{Gal}(L_\infty/L_\infty \cap K_d)$. Le diagramme suivant illustre la situation :



On en déduit que

$$\tilde{\lambda}(K_\infty) \leq \tilde{\lambda}(X/\mathfrak{A}_{K_\infty} X) \quad \text{et} \quad \tilde{\mu}(K_\infty) \leq \tilde{\mu}(X/\mathfrak{A}_{K_\infty} X).$$

Aussi

$$\tilde{\lambda}(\text{Gal}(K_d \cap L_\infty/K_\infty)) \leq d - 1 \quad \text{et} \quad \tilde{\mu}(\text{Gal}(K_d \cap L_\infty/K_\infty)) = 0.$$

Alors

$$\tilde{\lambda}(K_\infty) \leq d - 1 + \tilde{\lambda}(X/\mathfrak{A}_{K_\infty} X) \quad \text{et} \quad \tilde{\mu}(K_\infty) \leq \tilde{\mu}(X/\mathfrak{A}_{K_\infty} X).$$

En fait $\tilde{\mu}(K_\infty) = \tilde{\mu}(X/\mathfrak{A}_{K_\infty} X)$. Avec la notation de la Proposition 3.2.1 on a

$$\tilde{\mu}(K_\infty) + \tilde{\mu}(T) = \tilde{\mu}(G/G') \geq \tilde{\mu}(X/G')$$

et de la suite exacte de la même proposition on a

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}(X/\mathfrak{A}_{K_\infty}X) &= \tilde{\mu}(X/G') + \tilde{\mu}(G'/\mathfrak{A}_{K_\infty}X) \\ &\leq \tilde{\mu}(K_\infty) + \tilde{\mu}(T) + \tilde{\mu}(G'/\mathfrak{A}_{K_\infty}X),\end{aligned}$$

mais T et $G'/\mathfrak{A}_{K_\infty}X$ sont des $\mathbb{Z}_\ell$ -modules de type fini, donc leurs invariants $\tilde{\mu}$ sont nuls, d'où l'égalité.

Théorème 3.3.1. *Soit K_∞ une $\mathbb{Z}_\ell$ -extension d'un corps de nombres K dans laquelle toutes les places sauvages de K sont finiment décomposées. Il existe un entier n_0 et une constante c , qui dépendent seulement de K_∞ , tels que $\tilde{\mu}(K'_\infty) < c$ pour toute $\mathbb{Z}_\ell$ -extension K'_∞ de K avec $[K_\infty \cap K'_\infty : K] \geq \ell^{n_0}$.*

Preuve : Soit $K_\infty \in \Delta^0$ par la proposition 3.2.1, on a $K_\infty \in \Delta(X)$, c'est à dire $X/\mathfrak{A}_{K_\infty}X$ est un module noethérien et de torsion ; il existe $f \in \Lambda_d$ tel que $fX = 0$ et $f \notin \mathfrak{A}_{K_\infty}$.

Supposons que X est engendré par s éléments sur Λ_d et soit $M = \Lambda_d/(f)$, il existe un homomorphisme surjectif de Λ_d -modules :

$$M^s = (\Lambda_d/(f))^s \longrightarrow X. \quad (3.1)$$

Il est clair que $M^s/\mathfrak{A}_{K_\infty}M^s$ et $M/\mathfrak{A}_{K_\infty}M$ sont des Λ_{K_∞} -modules noethériens et de torsion. Il suit que $M^s/\mathfrak{A}_{K'_\infty}M^s$ et $M/\mathfrak{A}_{K'_\infty}M$ sont des $\Lambda_{K'_\infty}$ -modules noethériens et de torsion pour tout K'_∞ dans un voisinage de K_∞ , car $\Delta(M)$ et $\Delta(M^s)$ sont des ouverts de Δ .

Le morphisme (3.1) induit un homomorphisme surjectif de $\Lambda_{K'_\infty}$ -modules :

$$M^s/\mathfrak{A}_{K'_\infty}M^s \longrightarrow X/\mathfrak{A}_{K'_\infty}X,$$

de ce morphisme on obtient que $\tilde{\mu}(M^s/\mathfrak{A}_{K'_\infty}M^s) \geq \tilde{\mu}(K'_\infty)$. Notons que $\tilde{\mu}(M^s/\mathfrak{A}_{K'_\infty}M^s) = s\tilde{\mu}(M/\mathfrak{A}_{K'_\infty}M)$. On va démontrer que $\tilde{\mu}(M/\mathfrak{A}_{K'_\infty}M)$ est borné dans un voisinage de K_∞ .

Or, on a

$$\begin{aligned}M/\mathfrak{A}_{K'_\infty}M &= (\Lambda_d/(f))/(\mathfrak{A}_{K'_\infty}(\Lambda_d/(f))) \\ &\simeq \Lambda_d/(\mathfrak{A}_{K'_\infty} + (f)) \\ &\simeq \Lambda_{K'_\infty}/(\bar{f}),\end{aligned} \quad (3.2)$$

avec $\bar{f}$ la réduction de f modulo $\mathfrak{A}_{K'_\infty}$, donc $\tilde{\mu}(M/\mathfrak{A}_{K'_\infty}M)$ est la plus grande puissance de ℓ divisant $\bar{f}$ dans $\Lambda_{K'_\infty}$, c'est à dire, l'entier $\tilde{\mu}$ défini comme $f \in (\ell^{\tilde{\mu}}) + \mathfrak{A}_{K'_\infty}$ mais $f \notin (\ell^{\tilde{\mu}+1}) + \mathfrak{A}_{K'_\infty}$.

Soit $\tilde{\mu}_0 = \tilde{\mu}(M/\mathfrak{A}_{K_\infty}M)$, alors on a $s\tilde{\mu}_0 \geq \tilde{\mu}(K_\infty)$. Et on a $f \notin (\ell^{\tilde{\mu}_0+1}) + \mathfrak{A}_{K_\infty}$, en particulier pour n_0 assez grand on a $f \notin (\ell^{\tilde{\mu}_0}) + \mathfrak{A}_{K_\infty} + \mathfrak{M}^{n_0+1}$. Pour $K'_\infty \in \Delta(K_\infty, n_0)$ on a l'inclusion $\mathfrak{A}_{K'_\infty} \subset \mathfrak{A}_{K_\infty} + \mathfrak{M}^{n_0+1}$, il suit que $f \notin (\ell^{\tilde{\mu}+1}) + \mathfrak{A}_{K'_\infty}$ donc

$$\tilde{\mu}(M/\mathfrak{A}_{K'_\infty}M) \leq \tilde{\mu}_0.$$

On conclut que $\mu(K'_\infty) \leq s\tilde{\mu}_0$ pour toute $\mathbb{Z}_\ell$ -extension K'_∞ de K avec $[K_\infty \cap K'_\infty : K] \geq \ell^{n_0}$. $\square$

Remarque: Ce résultat, peut être déduit directement du Théorème 4 dans [Gre73], puisqu'on sait que $\mu = \tilde{\mu}$ pour toute $\mathbb{Z}_\ell$ -extension (2.3.1 et 2.3.2). Néanmoins, la démonstration de cette théorème nous permet de mieux comprendre celle du résultat suivant.

Théorème 3.3.2. Soit K_∞ une $\mathbb{Z}_\ell$ -extension d'un corps de nombres K dans lequel toutes les places sauvages de K sont finiment décomposées. Si $\tilde{\mu}(K_\infty) = 0$, alors il existe un entier n_0 et une constante c , qui dépendent seulement de K_∞ , tels que $\tilde{\mu}(K'_\infty) = 0$ et $\tilde{\lambda}(K'_\infty) < c$ pour toute $\mathbb{Z}_\ell$ -extension K'_∞ de K avec $[K_\infty \cap K'_\infty : K] \geq \ell^{n_0}$.

Preuve : Soit $K_\infty \in \Delta^0$ par la proposition 3.2.1, on a $K_\infty \in \Delta(X)$, c'est à dire $X/\mathfrak{A}_{K_\infty}X$ est un module noethérien et de torsion. D'après le théorème précédent, on peut toujours choisir un n_0 assez grand tel que $\tilde{\mu}(K'_\infty) = 0$ pour $K'_\infty \in \Delta(K_\infty, n_0)$.

Or, comme $X/\mathfrak{A}_{K_\infty}X$ est de torsion, il existe $h \in \Lambda_d$ tel que $hX \subset \mathfrak{A}_{K_\infty}X$. En plus, puisque $\tilde{\mu}(K_\infty) = 0$, on a $h \notin (\ell) + \mathfrak{A}_{K_\infty}$. Supposons que X est engendré par $x_1, \dots, x_s$. Alors

$$hx_i = \sum_{j=1}^s c_{ij}x_j \quad \text{pour } i = 1, \dots, s \quad \text{et } c_{ij} \in \mathfrak{A}_{K_\infty},$$

il suit que $\sum_{j=1}^s (c_{ij} - \delta_{ij}h)x_j = 0$ pour $i = 1, \dots, s$.

Soit $f = \det(c_{ij} - \delta_{ij}h)$, alors $f \equiv \pm h^s \pmod{\mathfrak{A}_{K_\infty}}$, $f \in \text{Ann}(X)$ et $f \notin (\ell) + \mathfrak{A}_{K_\infty}$. Notons que le polynôme caractéristique de X a les même facteurs irréductibles que f .

Soit $\gamma_1, \dots, \gamma_d$ des générateurs de $\text{Gal}(K_d/K)$ tels que $\gamma_1|_{K_\infty}$ engendre $\text{Gal}(K_\infty/K)$ et $\gamma_2, \dots, \gamma_d \in \text{Gal}(K_d/K_\infty)$. Pour toute extension $K'_\infty \in \Delta(K_\infty, 1)$, $\gamma_i|_{K'_\infty}$ engendre $\text{Gal}(K'_\infty/K)$. Soit $T_i = \gamma_i - 1$ de manière d'identifier l'algèbre de groupe Λ_d avec l'anneau des séries formelles $\mathbb{Z}_\ell[[T_1, \dots, T_d]]$, et notons l'idéal $\mathfrak{A}_{K_\infty} = (T_2, \dots, T_d)$.

L'homomorphisme

$$\begin{aligned} \Lambda_d &\longrightarrow \Lambda_{K_\infty} \simeq \mathbb{Z}_\ell[[T]] \\ T_1 &\mapsto T \\ T_i &\mapsto 0 \text{ pour } i = 2, \dots, d \end{aligned}$$

envoie

$$f = f_0(T_2, \dots, T_d) + f_1(T_2, \dots, T_d)T_1 + f_2(T_2, \dots, T_d)T_1^2 + \dots$$

dans

$$f_0(0, \dots, 0) + f_1(0, \dots, 0)T + f_2(0, \dots, 0)T^2 + \dots,$$

en particulier les $f_i(0, \dots, 0)$ ne peuvent tous être nuls ou divisibles par ℓ . Notons que $K'_\infty \in \Delta(K_\infty, n_0)$ si et seulement si $K_\infty \in \Delta(K'_\infty, n_0)$, ce qui donne $\mathfrak{A}_{K_\infty} \subset \mathfrak{A}_{K'_\infty} + \mathfrak{M}^{n_0}$ avec $\mathfrak{M}$ l'idéal maximale de l'algèbre Λ_d . Maintenant considérons le morphisme

$$\begin{aligned} \Lambda_d &\longrightarrow \Lambda_{K'_\infty} \simeq \Lambda_d/\mathfrak{A}_{K'_\infty} \simeq \mathbb{Z}_\ell[[T]] \\ T_1 &\mapsto T \end{aligned}$$

et les $T_i \in \mathfrak{A}_{K_\infty}$ sont donc envoyés dans l'image de $\mathfrak{M}^s$, qui est juste l'idéal $\mathfrak{M}_{K'_\infty}^s$ avec $\mathfrak{M}_{K'_\infty}$ étant l'idéal maximal de l'algèbre $\Lambda_{K'_\infty}$. Ce morphisme envoie f à

$$(f_0(0, \dots, 0) + r_0) + (f_1(0, \dots, 0) + r_1)T + (f_2(0, \dots, 0) + r_2)T^2 + \dots,$$

avec $r_i \in \mathfrak{M}_{K'_\infty}^s$.

On utilise le même esprit de la démonstration du théorème précédent. Soit $M = \Lambda_d/(f)$, on va démontrer que $\tilde{\lambda}(M/\mathfrak{A}_{K'_\infty}M)$ est borné pour toute $K'_\infty \in \Delta(K_\infty, n_0)$ pour n_0 assez grand. On a $M/\mathfrak{A}_{K'_\infty}M \simeq \Lambda_{K'_\infty}/(f)$ avec $\bar{f} \equiv f \pmod{\mathfrak{A}_{K'_\infty}}$ (voir (3.2)). On peut écrire $\bar{f}$ comme une unité

dans Λ_d fois un polynôme distingué (il n'y a pas de terme en ℓ puisque $\tilde{\mu}(M/\mathfrak{A}_{K'_\infty} M) = 0$ pour n_0 assez grand), donc $\tilde{\lambda}(M/\mathfrak{A}_{K'_\infty} M)$ est le degré de Weierstrass du polynôme distingué. Ainsi, $\tilde{\lambda}(M/\mathfrak{A}_{K'_\infty} M) = w$ est le plus petit entier tel que $f_i(0, \dots, 0)$ est une unité ℓ -adique. Mais si l'on prend $n_0 > w$, on sait que $\mathfrak{A}_{K'_\infty} \subset \mathfrak{A}_{K'_\infty} + \mathfrak{M}^{n_0}$ et chaque $r_i \in \mathfrak{M}_{K'_\infty}^{n_0}$ dans

$$(f_0(0, \dots, 0) + r_0) + (f_1(0, \dots, 0) + r_1)T + (f_2(0, \dots, 0) + r_2)T^2 + \dots,$$

il résulte que les coefficients des termes T^i avec $i < n_0$ sont tous divisibles par ℓ , puisque $\mathfrak{M}_{K'_\infty}^k = (\ell^k, \ell^{k-1}T, \dots, \ell T^{k-1}, T^k)$ et le coefficient dans T^w est encore une unité. Donc $\tilde{\lambda}(M/\mathfrak{A}_{K'_\infty} M) = \tilde{\lambda}(M/\mathfrak{A}_{K'_\infty} M)$, et alors $\tilde{\lambda}(K'_\infty) < sw$ pour toute $\mathbb{Z}_\ell$ -extension $K'_\infty \in \Delta(K_\infty, n_0)$. $\square$

Dans le cas $\Delta^0 = \Delta(X) = \Delta$ (voir Ex. 3.2.1 et Ex. 3.2.2), la compacité de Δ nous permet d'énoncer le corollaire suivant qui suit immédiatement des théorèmes précédents.

Corollaire 3.3.1. *Soit K un corps de nombres pour lequel $\Delta^0 = \Delta$, alors $\tilde{\mu}(K_\infty)$ est borné pour toute $\mathbb{Z}_\ell$ -extension K_∞ de K . De plus, si $\tilde{\mu}(K_\infty) = 0$ pour toute $\mathbb{Z}_\ell$ -extension de K alors, $\tilde{\lambda}(K_\infty)$ est borné pour toute $K_\infty \in \Delta$.*

3.4 Nombres de classes logarithmiques dans les $\mathbb{Z}_\ell^d$ -extensions

Soit K_d/K une $\mathbb{Z}_\ell^d$ -extension d'un corps de nombres K . Son groupe de Galois $\Gamma_d = \text{Gal}(K_d/K)$ est un $\mathbb{Z}_\ell$ -module libre de rang d , isomorphe au produit $\mathbb{Z}_\ell^d$. Soit K_n le corps fixé par $\Gamma_d^{\ell^n}$ et soit $\tilde{e}_n$ la valuation ℓ -adique de l'ordre du groupe de classes logarithmiques $\widetilde{Cl}_{K_n}$ de K_n .

Dans cette section on démontre que la théorie de Cuoco et Monsky peut être employée à l'étude de l'ordre du groupe de classes logarithmiques. En particulier, on démontre que pour n assez grand $\tilde{e}_n$ est donné pour une expression du type Iwasawa qui dépend aussi en d .

3.4.1 Préliminaires

Fixons une base $\gamma_1, \dots, \gamma_d$ de Γ_d , et posons $X_i = \gamma_i - 1$ pour identifier l'algèbre de Iwasawa Λ_d avec l'anneau local de séries formelles $\mathbb{Z}_\ell[[X_1, \dots, X_d]]$. Tout élément de $GL_d(\mathbb{Z}_\ell)$ induit un automorphisme de Γ_d qui se prolonge en un automorphisme de Λ_d , nous appelons un tel automorphisme linéaire.

Or supposons que $\gamma \in \Gamma_d - \Gamma_d^\ell$, alors $(\gamma - 1)$ est un idéal premier de hauteur 1 de Λ_d et $\overline{(\gamma - 1)}$ est un idéal premier de hauteur 1 de $\overline{\Lambda}_d = \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}[[X_1, \dots, X_d]]$.

Définition 3.4.1. On suppose que $0 \neq F \in \Lambda_d$. Si l'on écrit $F = \ell^{\tilde{\mu}_d} G$ avec $\overline{G} \neq 0$. On définit :

- (i) $\tilde{\mu}_d(F) = \tilde{\mu}_d$.
- (ii) $\tilde{\lambda}_d(F) = \sum v_P(\overline{G})$ la somme est comprise parmi les idéaux premiers P de hauteur 1 de $\overline{\Lambda}_d$ de la forme $(\gamma - 1)$.

Remarque: Dans le cas $d = 1$, $\tilde{\mu}_d(F)$ est juste l'invariant d'Iwasawa $\tilde{\mu}$. En plus, comme $\overline{\Lambda}_1 = \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}[[T]]$, alors $\tilde{\lambda}_d(F)$ est précisément l'invariant $\tilde{\lambda}$ d'Iwasawa, car dans ce cas F est un polynôme distingué (voir 2.13).

Ensembles $\mathbb{Z}_\ell$ -plats

Soit μ_n le groupe des racines ℓ^n -ièmes de l'unité dans une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ de $\mathbb{Q}_\ell$. Nous notons $\mu_\infty = \bigcup_{n \geq 1} \mu_{\ell^n}$ la réunion des μ_n . On dénote v_ℓ la valuation de $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ à valeurs rationnelles, telle que $v_\ell(\ell) = 1$ et avec la convention inusuelle $v_\ell(0) = 0$. Supposons $F \in \Lambda_d$ et $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_d) \in \mu_\infty^d$; alors $F(\zeta) = F(\zeta_1 - 1, \dots, \zeta_d - 1)$ représente un élément de $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ de valuation ≥ 0 .

Définition 3.4.2. Soit $\Sigma_n(F) = \sum_{\zeta \in \mu_n^d} v_\ell(F(\zeta - 1))$.

On peut équiper μ_∞^d d'une topologie. Pour cela considérons le $\mathbb{Z}_\ell$ -module libre $E_d = \text{Hom}(\mu_\infty^d, \mu_\infty)$. Un élément de E_d est donné par $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_d) \rightarrow \prod \zeta_i^{a_i}$ avec $(a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{Z}_\ell^d$. Un ensemble $X \subset \mu_\infty^d$ est fermé s'il est l'union finie des parties définies par un ensemble fini d'équations $\tau_i(\zeta) = \xi_i$ avec $\tau_i \in E_d$ et $\xi_i \in \mu_\infty$. Avec cette définition, on définit une topologie pour μ_∞^d .

Définition 3.4.3. Un ensemble T est dit $\mathbb{Z}_\ell$ -plat, s'il est défini pour des équations

$$\tau_i(\zeta) = \xi_i \quad \text{avec } 1 \leq i \leq k,$$

où les τ_i sont linéairement indépendants et $\xi_i \in \mu_\infty$. On note $\dim T = d - k$.

En particulier, un ensemble $\mathbb{Z}_\ell$ -plat de dimension $d - 1$ est une partie de μ_∞^d définie par une seule équation de la forme $\prod_{i=1}^d \zeta_i^{a_i} = \xi$ avec $a_i \in \mathbb{Z}_\ell$ non tous divisibles par ℓ et $\xi \in \mu_\infty$.

Exemple 3.4.1. L'ensemble $\mathbb{Z}_3$ -plat de dimension avec $d = 2$ et $k = 1$ défini par l'équation $xy = \zeta_3$ contient l'ensemble $\{(\zeta_9^{k+3}, \zeta_9^{-k})\}$, avec $\zeta_9^3 = \zeta_3$. $\blacklozenge$

Il résulte que les parties fermées et irréductibles de μ_∞^d sont précisément les ensembles $\mathbb{Z}_\ell$ -plats [Mon81a, Thm. 1.8]. Pour $\xi \in \mu_\infty^d$ on définit $o(\xi)$ comme le plus petit entier k pour lequel $\xi^{\ell^k} = 1$.

Définition 3.4.4. Soit $A = (\tau_1, \dots, \tau_d)$ une base de E_d et $m \geq 0$ un entier. On définit $C(A, m)$ comme l'ensemble de tous les $\zeta \in \mu_\infty^d$ qui satisfont :

$$o(\tau_1(\zeta)) \geq m, \quad o(\tau_2(\zeta)) \geq o(\tau_1(\zeta)) + m, \dots, o(\tau_d(\zeta)) \geq o(\tau_{d-1}(\zeta)) + m.$$

On a le résultat suivant de compacité :

Théorème 3.4.1 (Thm. 1.14 [Mon81a]). *Supposons que pour chaque base A de E_d on se donne un entier $m_A \geq 0$. Alors μ_∞^d est couvert par un nombre fini des $C(A, m_A)$ et un sous-ensemble propre fermé de μ_∞^d .*

L'estimation fondamentale

Soient f et g deux fonctions de la variable réelle x . On dit que f est dominée par g , lorsqu'il existe des constantes C et N telles que pour tout $x > N$ on a $|f(x)| \leq C|g(x)|$. Si f est dominée par g , on dénote tout simplement $g(x) = O(f(x))$.

Théorème 3.4.2 (Thm. 1.7 [CM81]). *Supposons que $0 \neq F \in \Lambda_d$. Alors*

$$\Sigma_n(F) = (\tilde{\mu}_d \ell^n + \tilde{\lambda}_d n + O(1)) \ell^{(d-1)n},$$

avec $\tilde{\mu}_d = \tilde{\mu}_d(F)$ et $\tilde{\lambda}_d = \tilde{\lambda}_d(F)$.

3.4.2 Plongement Cyclotomique

Soit $\zeta \in \mathbb{P}_\infty^d$. L'anneau $\mathbb{Z}_\ell[\zeta]$ est un $\mathbb{Z}_\ell$ -module libre de rang $\varphi(\ell^r)$ où $\ell^r = \max_i \{o(\zeta_i)\}$. On dit que deux éléments dans $\mathbb{P}_n^d$ sont conjugués s'il existe un automorphisme de $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ qui les identifie. Le nombre de conjugués coïncide avec le rang de $\mathbb{Z}_\ell[\zeta]$. Considérons le $\mathbb{Z}_\ell$ -module $\bigoplus_{\mathbb{P}_n^d/\sim} \mathbb{Z}_\ell[\zeta]$ où la somme est comprise parmi les représentantes ζ des classes de $\mathbb{P}_n^d$; son rang est ℓ^{dn} .

Exemple 3.4.2. Soit $\ell = 3$ et $\zeta = (\zeta_3, \zeta_3^2) \in \mathbb{P}_1^2$. Il est facile de voir que ζ a deux conjugués, soit lui même et (ζ_3^2, ζ_3) , le rang de $\mathbb{Z}_\ell[\zeta_3, \zeta_3^2] = \mathbb{Z}_\ell[\zeta_3]$ est bien 2. De plus, il existe 5 classes de conjugaison, dont quatre donnent lieu à des $\mathbb{Z}_\ell$ -modules de rang 2 et la classe de l'identité. Donc $\bigoplus_{\mathbb{P}_1/\sim} \mathbb{Z}_\ell[\zeta]$ est un module de rang 9. $\blacklozenge$

Soit ω_n l'idéal dans Λ_d engendré par les $(1 + X_i)^{\ell^n} - 1$. Pour chaque $\zeta \in \mathbb{P}_n^d$ il existe un homomorphisme

$$\begin{aligned} \Lambda_d/\omega_n &\longrightarrow \mathbb{Z}_\ell[\zeta], \\ F &\mapsto F(\zeta - 1); \end{aligned}$$

considérons donc le produit de ces morphismes

$$\varphi_n : \Lambda_d/\omega_n \longrightarrow \bigoplus_{\mathbb{P}_n^d/\sim} \mathbb{Z}_\ell[\zeta].$$

Le quotient $\Lambda_d/(\omega_n, \ell)$ est un espace vectoriel de dimension ℓ^{dn} sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, alors Λ_d/ω_n est un $\mathbb{Z}_\ell$ -module de rang ℓ^{dn} . De plus, φ_n est injective et son conoyau est annulé par ℓ^{dn} [CM81, Thm. 2.2].

Définition 3.4.5. Soit G un $\mathbb{Z}_\ell$ -module noethérien, on dénote G_{tors} la partie de torsion de G , $r(G) = \text{rang}(G) = \text{rang}(G/G_{\text{tors}})$ et $e(G)$ l'exposant de l'ordre $\ell^{e(G)}$ de G_{tors} .

Théorème 3.4.3 (Thm. 2.5 [CM81]). *Soit $M = \Lambda_d/(F)$ pour $F \in \Lambda_d$ et posons $G_n = M/\omega_n M$. Supposons que $r(G_n) = O(\ell^{(d-2)n})$. Alors :*

$$e(G_n) = (\tilde{\mu}_d \ell^n + \tilde{\lambda}_d n + O(1)) \ell^{(d-1)n}.$$

Or, soit M un Λ_d -module. Le résultat suivant montre que l'exposant du sous-groupe de torsion de $M/\omega_n M$ ne grandit trop avec n .

Pour chaque $\zeta \in \mathbb{P}_\infty^d$ on utilise l'application $\Lambda_d \rightarrow \mathbb{Z}_\ell[\zeta]$, $F \mapsto F(\zeta - 1)$ pour construire un $\mathbb{Z}_\ell[\zeta]$ -module fini :

$$M_\zeta = M \otimes_{\Lambda_d} \mathbb{Z}_\ell[\zeta]. \quad (3.3)$$

Il résulte qu'il existe un r tel que $\ell^r(M_\zeta)_{\text{tors}} = 0$ pour tout $\zeta \in \mathbb{P}^d$. L'application $\varphi_n : M \rightarrow \bigoplus_{\mathbb{P}_n^d/\sim} M_\zeta$ restreinte au quotient $M/\omega_n M$:

$$\varphi_n : M/\omega_n M \rightarrow \bigoplus_{\mathbb{P}_n^d/\sim} M_\zeta \quad (3.4)$$

est injective, et son noyau et conoyau sont annulés par ℓ^{dn} .

Théorème 3.4.4 (Thm. 2.8 [CM81]). *Soit M un Λ_d -module fini. Il existe une constante c telle que ℓ^{dn+c} annule le sous-groupe de torsion de $M/\omega_n M$ pour tout n .*

Preuve : Prenons c tel que $\ell^c(M_\zeta)_{\text{tors}} = 0$ pour tout $\zeta \in \mathbb{P}_\infty^d$. Si $x \in (M/\omega_n M)_{\text{tors}}$, alors l'image de x pour l'application $\varphi_n : M/\omega_n M \rightarrow \bigoplus_{\mathbb{P}_n^d/\sim} M_\zeta$ est de torsion dans chaque M_ζ , donc $\ell^c x \in \ker \varphi_n \subset M/\omega_n M$. Mais le noyau de φ_n est annulé par ℓ^{dn} , donc $\ell^{dn+c} x = 0$. $\square$

3.4.3 Modules sur l'algèbre d'Iwasawa

Dans cette section nous nous limitons aux Λ_d -modules noethériens et de torsion. Il n'y a pas de crainte à ne considérer que cette sorte de modules puisque notre module d'intérêt $X = \text{Gal}(L_d/K_d)$ l'est (Thm. 3.2.1).

Définition 3.4.6. On dit que deux modules M et N sont pseudo-isomorphes lorsque s'il existe un homomorphisme $f : M \rightarrow N$ dont le localisé à tous les idéaux premiers de hauteur 1 de Λ_d est un isomorphisme. On dit qu'un module est pseudo-nul lorsqu'il est pseudo-isomorphe à 0, c'est-à-dire lorsque toutes ses localisations aux idéaux premiers de hauteur 1 de Λ_d sont 0.

Remarque: Cette définition coïncide avec la définition pour $d = 1$: en fait dans ce cas on a que X et Y sont pseudo-isomorphes s'il existe un Λ_1 -morphisme φ

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow X \xrightarrow{\varphi} Y \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

avec N et C finis. Or, si l'on prend un idéal premier $\mathfrak{p}$ de hauteur 1 de Λ_1 , le localisé $F_{\mathfrak{p}}$ d'un module fini F est 0, donc $X_{\mathfrak{p}} \simeq Y_{\mathfrak{p}}$ pour tout idéal premier de hauteur 1 de Λ_1 .

Rappelons le théorème de structure pour des modules noethériens et de torsion sur des anneaux locaux et réguliers, dans notre cas Λ_d :

Théorème 3.4.5 (Théorème de structure). *Tout module noethérien et de torsion M sur Λ_d est pseudo-isomorphe à une somme directe du type :*

$$M \sim \bigoplus_i \Lambda_d / P_i^{r_i},$$

où P_i sont des idéaux de hauteur 1 de Λ_d et $r_i \in \mathbb{N}$.

La localisation de M dans P_i est un $(\Lambda_d)_{P_i}$ -module de longueur finie $n_i > 0$. Le polynôme caractéristique χ de M est l'idéal principal $\prod P_i^{r_i}$.

Soit M un Λ_d -module noethérien et de torsion, et $G_n = M/\omega_n M$. Nous allons décrire les propriétés de croissance de l'exposant $e(G_n)$ de l'ordre $\ell^{e(G_n)}$ de la partie de torsion G_{tors} de G .

Supposons que M est pseudo-nul, alors

$$r(G_n) = O(\ell^{(d-2)n}) \quad \text{et} \quad e(G_n) = O(\ell^{(d-1)n}). \quad (3.5)$$

Or, soit M un Λ_d -module de torsion avec polynôme caractéristique χ , et supposons que $r(G_n) = O(\ell^{(d-2)n})$, alors pour un Λ_d -module M' pseudo-isomorphe à M on a

$$|e(G_n) - e(G'_n)| = O(\ell^{(d-1)n}),$$

donc on peut remplacer M par un Λ_d -module élémentaire, c'est à dire une somme directe de Λ_d -modules de la forme $\Lambda_d/(F_i)$ avec $\prod F_i = \chi$. Ainsi on peut appliquer le Théorème 3.4.3 aux $\Lambda_d/(F_i)$ et on obtient :

Théorème 3.4.6. *Soit M un Λ_d -module de torsion avec polynôme caractéristique χ , et on suppose que $r(G_n) = O(\ell^{(d-2)n})$. Alors*

$$e(G_n) = (\tilde{\mu}_d \ell^n + \tilde{\lambda}_d n + O(1)) p^{(d-1)n}.$$

La question, est alors : a-t-on $r(G_n) = O(\ell^{(d-2)n})$? Dans ce qui suit on donne des conditions pour que l'égalité soit satisfaite.

Soit $\zeta \in \mu_\infty^d$ et M_ζ comme dans (3.3). M_ζ est un module de type fini sur l'extension $\mathbb{Z}_\ell[\zeta]$. Soit $r_\zeta(M_\zeta)$ le $\mathbb{Z}_\ell[\zeta]$ -rang de M_ζ . Notons que

$$\begin{aligned} r(G_n) = r(M/\omega_n M) &= r\left(\bigoplus_{\mu_n^d/\sim} M_\zeta\right) \quad (\varphi_n \text{ injective (3.4)}) \\ &= \sum_{\mu_n^d/\sim} r(M_\zeta) \\ &= \sum_{\mu_n^d/\sim} r(\mathbb{Z}_\ell[\zeta]) r_\zeta(M_\zeta) \\ &= \sum_{\mu_n^d} r_\zeta(M_\zeta) \quad (\text{puisque } r(\mathbb{Z}_\ell[\zeta]) = \# \text{ conjugués de } \zeta). \end{aligned}$$

L'ensemble $Z(M) = \{\zeta \in \mu_\infty^d \mid r_\zeta(M_\zeta) > 0\}$ est un sous-ensemble fermé et propre de μ_∞^d , et comme tel c'est l'union finie d'ensembles $\mathbb{Z}_\ell$ -plats.

Nous allons borner le rang $r(M/\omega_n M)$ en fonction de l'ensemble $Z_n(M) = \{\zeta \in Z(M) \mid \zeta^{\ell^n} = 1\}$. Une borne inférieure immédiate est $|Z_n(M)| \leq r(M/\omega_n M)$. Or, supposons que M est engendré par s éléments. Alors M_ζ est engendré par s éléments sur $\mathbb{Z}_\ell[\zeta]$ et chaque $r_\zeta(M_\zeta) \leq s$, comme $r(M/\omega_n M) = \sum_{\mu_n^d} r_\zeta(M_\zeta)$, on a

$$r(M/\omega_n M) = \sum_{\mu_n^d} r_\zeta(M_\zeta) \leq s |Z_n(M)|.$$

Si T est un ensemble $\mathbb{Z}_\ell$ -plat de μ_∞^d soit $P_T = \{F \mid F(\zeta - 1) = 0 \ \forall \zeta \in T\}$, puisque les ensembles $\mathbb{Z}_\ell$ -plats sont irréductibles il résulte que P_T est un idéal premier de Λ_d . En particulier, si T a pour dimension $d-1$, alors P_T est un idéal premier (Ψ) de hauteur 1, on appelle un tel élément un *idéal spécial* de Λ_d , et le lieu géométrique de $\Psi(\zeta - 1)$ est l'union de T et ses conjugués, qui sont appelés les *$\mathbb{Z}_\ell$ -plats attachés* à (Ψ) [CM81, Lemma 3.10].

Théorème 3.4.7. *Soit M un Λ_d -module de torsion. Alors les $d-1$ -composantes de $Z(M)$ sont précisément les $\mathbb{Z}_\ell$ -plats attachés aux premiers spéciaux qui divisent le polynôme caractéristique de M .*

Preuve : Soit T un $\mathbb{Z}_\ell$ -plat de dimension $d-1$. $T \subset Z(M)$ si et seulement si $(\Psi) \supset \text{Ann}(M)$. Mais les premiers de hauteur 1 de Λ_d qui contiennent l'annulateur de M sont les facteurs irréductibles du polynôme caractéristique de M . $\square$

Le résultat suivant donne le critère pour la dimension du rang de G_n cherchée :

Théorème 3.4.8 (Thm. 3.13 [CM81]). *$r(M/\omega_n M) = O(\ell^{(d-2)n})$ si et seulement si le polynôme caractéristique χ de M n'a pas de facteurs spéciaux.*

Preuve : Si un premier spécial divise χ alors $Z(M)$ contient un ensemble $\mathbb{Z}_\ell$ -plat de dimension $d-1$ par le Théorème 3.4.7. Alors $\ell^{(d-1)n} \leq |Z_n(M)| \leq r(M/\omega_n M)$ pour n assez grand. Au contraire si aucun premier spécial divise χ , on a que l'ensemble fermé $Z(M)$ est une union de $\mathbb{Z}_\ell$ -plats de dimension $\leq d-2$. Et alors $|Z_n(M)| = O(\ell^{(d-2)n})$, donc $r(M/\omega_n M) = O(\ell^{(d-2)n})$. $\square$

Remarque: Pour le cas $d = 1$. Le théorème précédent se traduit comme : $r(M/\omega_n M) = 0$ si et seulement si le polynôme caractéristique χ de M n'a pas de facteurs spéciaux.

Un ensemble $\mathbb{Z}_\ell$ -plat de dimension 0 est défini par $x^a = \xi$ pour un $\xi \in \mathbb{P}_\infty$ et $a \in \mathbb{Z}_\ell \setminus \ell\mathbb{Z}_\ell$. Donc il ne contient qu'un seul élément, et celui-ci est conjugué à ξ . Donc l'idéal (Ψ) qui lui correspond est $((1+T)^{\ell^k} + 1)$; il est bien un polynôme distingué en T . Sans craindre on peut supposer que M est de la forme $\Lambda/(P)$, avec P un polynôme distingué. Et on sait que $M/\omega_n M$ est infini dans le cas $(\omega_n, \Psi) \neq 1$.

3.4.4 Structures admissibles

Dans le cas d'une $\mathbb{Z}_\ell$ -extension, la formule de paramétrage du groupe de classes est obtenue en exprimant la ℓ -partie du groupe de classes comme un quotient qui dépend, en outre du "sous-groupe dérivé" $\omega_n M$, d'un sous-module de M induit par la ramification des places sauvages. En poursuivant cette idée, dans cette section on considère des quotients de Λ_d -modules noethériens et de torsion qui dépendent de sous-modules de M et dont les quotients, tout comme les quotients $M/\omega_n M$, satisfont des propriétés de croissance similaires à ces derniers.

Définition 3.4.7. Soit M un Λ_d -module noethérien et de torsion. Une structure $\mathcal{S}$ sur M consiste d'un entier $v \geq 0$ avec un ensemble fini de couples (τ_i, M_i) avec $\tau_i \in \Gamma_d - \Gamma_d^\ell$ et les M_i sont des sous-modules de M . Lorsqu'on donne une structure on pose $\omega_{i,n} = \tau_i^{\ell^n} - 1$.

Le quotient $\frac{\omega_{i,n}}{\omega_{i,v}}$ est un polynôme bien défini sur τ_i pour $n \geq v$ (voir 2.10).

Définition 3.4.8. Soit $\mathcal{S}$ une structure, on définit

- (a) $A_n = \omega_n M + \sum_i \frac{\omega_{i,n}}{\omega_{i,v}} M_i$,
- (c) $G_n = M/A_n$.

Remarque: La structure $(v, (\tau, 0))$ correspond au cas étudié dans la section précédent. En particulier, si l'on ajoute la paire $(\tau, 0)$ à une structure les groupes attachés G_n ne changent pas.

Définition 3.4.9. Soit $\mathcal{S}$ une structure et $\zeta \in \mathbb{P}_\infty^d$. On dénote $N = N(\zeta)$ le sous-module de M engendré par les M_i pour lesquels $\omega_{i,v}(\zeta) = 0$. On dit que ζ est *exceptionnel* pour $\mathcal{S}$ si $r_\zeta(M/N)_\zeta > 0$.

Remarque:

- (i) Tous les ζ exceptionnels appartient à $Z(M)$; en fait si $r_\zeta(M/N)_\zeta > 0$ on a $r_\zeta(M_\zeta) > 0$.
- (ii) Si $\zeta \in Z(M)$ et $\omega_{i,v}(\zeta) \neq 0$, alors ζ est exceptionnel pour $\mathcal{S}$; ceci est aussi clair puisque dans ce cas N est trivial.
- (iii) Si les ensembles de points exceptionnels sont vides, alors les G_n sont des groupes finis.

Soit N' l'image de N sous le morphisme $M \rightarrow M_\zeta$. Observons que

$$\begin{aligned} \frac{\omega_{i,n}}{\omega_{i,v}} &= \frac{\tau_i^{\ell^n} - 1}{\tau_i^{\ell^v} - 1} \\ &= (\tau_i^{\ell^v})^{\ell^{n-v}-1} + (\tau_i^{\ell^v})^{\ell^{n-v}-2} + \dots + \tau_i^{\ell^v} + 1; \end{aligned}$$

alors

$$\frac{\omega_{i,n}}{\omega_{i,v}}(\zeta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau_i(\zeta^{\ell^v}) \neq 0 \\ \ell^{n-v} & \text{autrement.} \end{cases}$$

Donc l'image de A_n est $\ell^{n-v}N'$. Ce qui nous donne

$$\begin{aligned} r_\zeta(M/N)_\zeta &= r_\zeta(M_\zeta/N') \\ &= r_\zeta(M_\zeta/\ell^{n-v}N') \\ &= r_\zeta(G_n)_\zeta. \end{aligned}$$

Puis pour tout Λ_d -module noethérien M on a $r(M/\omega_n M) = \sum_{\mu_n^d} r_\zeta(M_\zeta)$, il suit que $r(G_n) = \sum_{\mu_n^d} r_\zeta(M/N)_\zeta$.

Si l'on dénote α_n le nombre d'éléments exceptionnels $\zeta \in \mu_n^d$ attachés à une structure $\mathcal{S}$ sur un Λ_d -module noethérien M engendré par s éléments. Alors on a

$$\alpha_n \leq r(G_n) \leq s\alpha_n.$$

Le théorème suivant est l'équivalent au Théorème 3.4.4 pour des structures.

Théorème 3.4.9. *Soit $\mathcal{S}$ une structure. Il existe une constante c telle que $\ell^{dn+n+c}(G_n)_{\text{tors}} = 0$.*

Preuve : Si $x \in M_\zeta$ est un élément de torsion dans $(G_n)_\zeta = M_\zeta/\ell^{n-v}N'$, alors x est de torsion aussi dans $(M/N)_\zeta = M_\zeta/N'$. Notons que pour la définition de $N(\zeta)$ il existe un nombre fini de $N(\zeta)$ différents pour les $\zeta \in \mu_\infty^d$. Il existe une constante c telle que $\ell^c((M/N)_\zeta)_{\text{tors}} = 0$ pour tout $\zeta \in \mu_\infty^d$. Donc $\ell^c x \in N'$, puisque $n \geq v$ on a que $\ell^{n+c}x = 0 \in (G_n)_\zeta$, et ℓ^{n+c} annule le sous-groupe de torsion de $(G_n)_\zeta$ pour tout $\zeta \in \mu_n^d$. Mais le noyau et le conoyau de l'application $G_n \rightarrow \bigoplus (G_n)_\zeta$ sont annulés par ℓ^{dn} , d'où le résultat. $\square$

Définition 3.4.10. Une structure $\mathcal{S}$ est dite admissible si $r(G_n) = O(\ell^{(d-2)n})$.

En fait, tout Λ_d -module noethérien et de torsion M admet une structure admissible :

Théorème 3.4.10 (Thm. 4.8 [CM81]). *Soit M un Λ_d -module noethérien et de torsion. Soient $\tau_i = \xi_i$ avec $\tau_i \in \Gamma - \Gamma^\ell$ et $\xi_i \in \mu_\infty$, des équations pour les composantes de dimension $d-1$ de $Z(M)$, et v un entier tel que chaque $o(\xi_i) \leq v$. Alors $(v, (\tau_i, M))$ est une structure admissible de M .*

Preuve : Supposons que ζ appartient à une composante de dimension $d-1$ de $Z(M)$. Donc $\tau_i(\zeta) = \xi_i$ et $\omega_{i,v}(\zeta) = 0$, d'où il suit que $N(\zeta) = M$; donc ζ n'est pas exceptionnel puisque $r_\zeta(M/M)_\zeta = 0$. Alors les éléments exceptionnels appartiennent aux composantes de dimension $\leq d-2$. Mais $\alpha_n = O(\ell^{(d-2)n})$ et donc $r(G_n) = O(\ell^{(d-2)n})$. $\square$

Soit $\mathcal{S}$ une structure admissible sur M et G_n les groupes attachés. En considérant une nouvelle structure $\mathcal{S}^*$ en remplaçant M_1 par M , on a que $|e(G_n) - e(G_n^*)| = O(\ell^{(d-1)n})$ [CM81, Lemma 4.9]. Si l'on applique cet argument à deux structures admissibles $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}^*$ sur un module M , on obtient le résultat suivant :

Théorème 3.4.11 (Thm. 4.10 [CM81]). *Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}^*$ deux structures admissibles sur M , et G_n et G_n^* leurs groupes respectives. Alors $|e(G_n) - e(G_n^*)| = O(\ell^{(d-1)n})$.*

Soit $\mathcal{S}$ une structure sur un module M pseudo-nul. Par (3.5) on a

$$r(G_n) \leq r(M/\omega_n M) = O(\ell^{(d-2)n})$$

et

$$e(G_n) \leq e(M/\omega_n M) + (dn + n + c)r(M/\omega_n M) = O(\ell^{(d-1)n}),$$

c'est-à-dire toute structure sur un module M pseudo-nul est admissible.

Théorème 3.4.12 (Thm. 4.12 [CM81]). *Soient M et M' des Λ_d -modules noethériens et de torsion pseudo-isomorphes et $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ des structures admissibles sur M et M' , avec groupes G_n et G'_n . Alors*

$$|e(G_n) - e(G'_n)| = O(\ell^{(d-1)n}).$$

Le théorème précédent nous permet donc, de remplacer un module M par tout module pseudo-isomorphe. Ceci est fondamental pour démontrer le résultat suivant :

Théorème 3.4.13 (Thm. 4.13 [CM81]). *Soit G_n les groupes attachés à une structure admissible sur M , et χ le polynôme caractéristique de M . Alors*

$$e_n(G_n) = (\tilde{\mu}_d \ell^n + \tilde{\lambda}_d n + O(1))p^{(d-1)n}.$$

Preuve : On peut supposer que M est de la forme $M = \Lambda_d/\psi^s$ avec ψ irréductible. Si ψ n'est pas un premier spécial, il suit du Théorème 3.4.8 que la structure triviale sur M est admissible. Et on obtient le résultat cherché du Théorème 3.4.6.

Supposons donc que ψ est spécial. On a deux cas à considérer :

Cas 1. $\psi = \tau - 1$ avec $\tau \in \Gamma - \Gamma^\ell$. Dans ce cas on a $\chi = \psi^s$, $\tilde{\mu}_d = 0$ et $\tilde{\lambda}_d = s$. Par un automorphisme linéaire on peut prendre $\tau = 1 + X_1$. La structure $(0, (\tau, M))$ est admissible pour ce cas par le théorème 3.4.10, en plus les ensembles exceptionnels sont vides, donc les groupes G_n sont finis. Si l'on définit des éléments g et h_n dans l'algèbre d'Iwasawa $\mathbb{Z}_\ell[[X]]$, comme $g = X$ et

$$h_n = \frac{((1+X)^{\ell^n} - 1)}{X},$$

et on considère l'anneau

$$R_n = \mathbb{Z}_\ell[[X]]/(g^s, h_n),$$

alors on a

$$G_n \simeq R_n[[X_2, \dots, X_d]]/((1+X_i)^{\ell^n} - 1)_{2 \leq i \leq d}.$$

Donc G_n est un R_n -module libre de rank $\ell^{(d-1)n}$ et R_n est fini avec $e(R_n) = sn$ [CM81, Lemma 4.14].

Cas 2. $\psi = \frac{\tau^{\ell^r} - 1}{\tau^{\ell^{r-1}} - 1}$ avec $\tau \in \Gamma - \Gamma^\ell$. Dans ce cas on a $\chi = \psi^s$, $\tilde{\mu}_d = 0$ et $\tilde{\lambda}_d = s(\ell^r - \ell^{r-1})$. Par un automorphisme linéaire on peut prendre $\tau = 1 + X_1$. La structure $(r, (\tau, M))$ est admissible pour ce cas par le théorème 3.4.10, et comme dans le cas précédent les ensembles exceptionnels sont vides, donc les groupes G_n sont finis. Cette fois on définit des éléments g et h_n dans l'algèbre d'Iwasawa $\mathbb{Z}_\ell[[X]]$ comme

$$g = \frac{((1+X)^{\ell^r} - 1)}{((1+X)^{\ell^{r-1}} - 1)}$$

et

$$h_n = \frac{(1+X)^{\ell^n} - 1}{((1+X)^{\ell^r} - 1)},$$

et on considère l'anneau

$$R_n = \mathbb{Z}_\ell[[X]]/(g^s, h_n),$$

alors on a

$$G_n \simeq R_n[[X_2, \dots, X_d]]/((1 + X_i)^{\ell^n} - 1)_{2 \leq i \leq d}.$$

Donc G_n est un R_n -module libre de rank $\ell^{(d-1)n}$ et R_n est fini avec $e(R_n) = s(\ell^r - \ell^{r-1})(n - r)$ [CM81, Lemma 4.14].

□

Pour finir cette section on énonce un résultat technique qui nous est utile dans la section prochaine.

Lemme 3.4.1 (Lemma 4.15 [CM81]). *Supposons qu'on ait une structure $\mathcal{S}$ sur M et pour $n \geq v$ des sous-modules $B_n \supset A_n$. Aussi, on suppose qu'on a la chaîne de modules emboîtés*

$$B_v \supset B_{v+1} \supset B_{v+2} \supset \dots,$$

et que les conditions suivantes sont satisfaites :

- (i) Il existe un s tel que chaque B_n/A_n peut être engendré par s éléments sur $\mathbb{Z}_\ell$.
- (ii) Les M/B_n sont finis.
- (iii) Les ordres des groupes $B_n/(B_{n+1} + A_n)$ sont bornés.

Alors on a

$$|e(G_n) - e(M/B_n)| = O(n).$$

Preuve : Comme M/B_n est fini et $A_n \subset B_n$, il existe des applications

$$\pi_n : (G_n)_{\text{tors}} \longrightarrow M/B_n,$$

et le noyau $\ker \pi_n \subset B_n/A_n$ est engendré par s éléments sur $\mathbb{Z}_\ell$. Le théorème 3.4.9 nous dit qu'il existe une constante c telle que ℓ^{dn+n+c} annule le sous-groupe de torsion $(G_n)_{\text{tors}}$. On en déduit alors que $e(\ker \pi_n) \leq s(dn + n + c) = O(n)$.

On va démontrer que $e(\text{coker } \pi_n) = O(n)$, donc la suite exacte

$$0 \longrightarrow \ker \pi_n \longrightarrow (G_n)_{\text{tors}} \longrightarrow M/B_n \longrightarrow \text{coker } \pi_n \longrightarrow 0,$$

devient triviale

$$0 \longrightarrow \ell^{c_1 n} (G_n)_{\text{tors}} \longrightarrow \ell^{c_2 n} (M/B_n) \longrightarrow 0,$$

pour des constantes c_1 et c_2 pour n assez grand, et donc $|e(G_n) - e(M/B_n)| = O(n)$.

Or, considérons la suite exacte

$$0 \longrightarrow B_n/A_n \longrightarrow M/A_n \longrightarrow M/B_n \longrightarrow 0.$$

Puisque M/B_n est fini et B_n/A_n peuvent être engendrés par s éléments sur $\mathbb{Z}_\ell$, on a que $r(G_n) \leq s$. La chaîne emboîtée de modules

$$M/A_n \subset M/A_{n+1} \subset M/A_{n+2} \subset \dots,$$

se stabilise aux rangs, c'est à dire, il existe n_0 tel que $r(G_{n_0}) = r(G_n)$ pour $n \geq n_0$. Et donc, pour $n \geq n_0$ les quotients A_{n_0}/A_n sont finis, et par conséquence $A_{n_0}/A_n \subset (G_n)_{\text{tors}}$. Il en résulte que $\text{coker } \pi_n$ est l'image homomorphe de $M/(B_n + A_{n_0})$, c'est à dire le morphisme

$$f : M/(B_n + A_{n_0}) \rightarrow \text{coker } \pi_n,$$

est surjectif. Puisque $|M/(B_n + A_{n_0})|$ est borné. Il suit que $e(B_{n_0}/(B_n + A_{n_0})) = O(n)$, et alors $e(M/(B_n + A_{n_0})) = O(n)$, en particulier $e(\text{coker } \pi_n) = O(n)$. □

3.4.5 Le théorème principal

Soit K_d/K une $\mathbb{Z}_\ell^d$ -extension d'un corps de nombres K . On dénote $\Gamma_d = \text{Gal}(K_d/K)$ son groupe de Galois, Γ_d est isomorphe à d -copies de $\mathbb{Z}_\ell$. Soit Λ_d l'algèbre d'Iwasawa de Γ_d . Étant donnés des générateurs $\gamma_1, \dots, \gamma_d$ de Γ_d on identifie Λ_d avec l'anneau $\mathbb{Z}_\ell[[T_1, \dots, T_d]]$ des séries formelles à d -variables sur $\mathbb{Z}_\ell$; via l'application $T_i = \gamma_i - 1$.

On étudie le Λ_d -module logarithmique X introduit dans la section 3.2. C'est à dire, $X = \text{Gal}(L_d/K_d)$ est le groupe de Galois de la ℓ -extension maximale abélienne logarithmiquement non-ramifiée L_d de K_d . On veut déduire des formules asymptotiques pour les nombres de classes logarithmiques $\tilde{e}_n(K_d/K)$ attachés aux étages $K_n = K_d^{\Gamma_d^{\ell^n}}$ de la $\mathbb{Z}_\ell^d$ -extension K_d .

Le groupe Γ_d agit par conjugaison sur X : $\gamma(x) = \bar{\gamma}x\bar{\gamma}^{-1}$, avec $\bar{\gamma} \in G = \text{Gal}(L_d/K)$ un relèvement de $\gamma \in \Gamma_d$. Ainsi, X est un groupe distingué de G , en outre le module X est un Λ_d -module noethérien et de torsion [Thm. 3.2.1]. Alors $G = X \rtimes \Gamma_d$.

Soit χ le polynôme caractéristique de X et soient $\tilde{\mu}(K_d/K)$ et $\tilde{\lambda}(K_d/K)$ les invariants définis dans la Définition 3.4.1, donc les invariants généralisant ceux définis par Iwasawa.

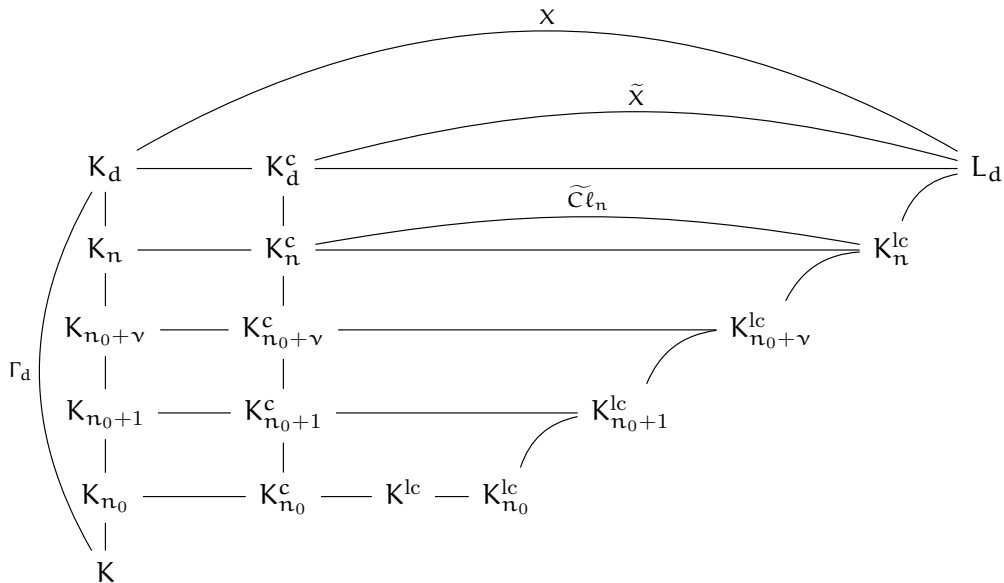
Les $\mathbb{Z}_\ell^d$ -extensions sont logarithmiquement non-ramifiées aux places modérées. En conséquence, les seules places qui pourraient se ramifier logarithmiquement sont les places sauvages. On sait que pour $d = 1$, ceci n'arrive pas lorsque la $\mathbb{Z}_\ell$ -extension est celle cyclotomique ; et sous la conjecture de Gross-Kuz'min dans une $\mathbb{Z}_\ell$ -extension non-cyclotomique au moins une place $\mathfrak{p}$ de K doit se ramifier logarithmiquement.

Théorème 3.4.14. *Soit K_d une $\mathbb{Z}_\ell^d$ -extension avec $d \geq 2$. Sous la conjecture de Gross-Kuz'min dans K_d , au moins une place $\mathfrak{p}$ de K au-dessus de ℓ se ramifie logarithmiquement dans K_d .*

Preuve : Supposons K_d est logarithmiquement non-ramifiée, alors le groupe de classes logarithmiques de degré arbitraire $\widetilde{Cl}_K^*$ de K contiens $\text{Gal}(K_d/K)$, mais $\dim_{\mathbb{Z}_\ell}(\text{Gal}(K_d/K)) \geq 2$. $\square$

On suppose en ce qui suit que $d \geq 2$, en plus pour éviter la dichotomie dessus on suppose que K_d ne contient pas l'extension cyclotomique K^c de K .

Le schéma suivant décrit notre situation générale :



Dans notre schéma n_0 est le plus grand entier tel que $K_d^{\Gamma_d^{\ell^{n_0}}} \subset K^c$. En particulier, on peut remplacer sans craindre $K = K_{n_0}$.

Soit $H = \text{Gal}(L_d/K^c)$. H est un sous-groupe de G , comme tel est un produit semi-direct d'un sous-groupe $\tilde{X}$ de X et Γ_d :

$$H = \tilde{X} \rtimes \Gamma_d.$$

Les sous-groupes d'inertie logarithmique dans $\text{Gal}(L_d/K)$ rencontrent trivialement X (et aussi $\tilde{X}$), donc sont contenus dans Γ_d . On dénote $H^{(n)} = \text{Gal}(L_d/K_n^c)$.

Soient $p_1, \dots, p_r$ les places de K qui ramifient logarithmiquement dans K_d , soient $\tilde{I}_1, \dots, \tilde{I}_r \subset G$ les groupes d'inertie logarithmique associés à des places $\mathfrak{P}_i$ au-dessus des p_i dans L_d . On dénote $\tilde{I}_i^{(n)}$ leurs restrictions à $\text{Gal}(L_d/K_n^c)$, c'est à dire $\tilde{I}_i^{(n)} = \tilde{I}_i \cap H^{(n)}$. Comme L_d/K_n^c est une extension galoisienne, tout sous-groupe d'inertie logarithmique de cette extension est conjugué à un $\tilde{I}_i^{(n)}$ par un élément de H .

L'extension L_d/K_d^c est logarithmiquement non-ramifiée, donc $\tilde{X}$ rencontre trivialement les groupes d'inertie logarithmique, l'application de restriction $H \rightarrow \Gamma_d$ envoie les $\tilde{I}_i$ dans des sous-groupes de Γ_d , que par abus de langage on continuera à nommer $\tilde{I}_i$.

Pour σ, τ dans G , on dénote le commutateur $[\sigma, \tau] = \sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$. Si S et T sont sous-ensembles de G on dénote $[S, T]$ l'adhérence du sous-groupe engendré par $[\sigma, \tau]$ avec $\sigma \in S$ et $\tau \in T$.

Définition 3.4.11. Soit Y_n le sous-groupe fermé de $H^{(n)}$ engendré par $[H^{(n)}, H^{(n)}]$ et les sous-groupes d'inertie logarithmique dans $\text{Gal}(L_d/K_n^c)$.

On dénote $B_n = Y_n \cap \tilde{X}$.

Remarque: Notons que Y_n est engendré par $[H^{(n)}, H^{(n)}]$ et tous les conjugués des $\tilde{I}_i^{(n)}$ par l'action de H .

Théorème 3.4.15. *Sous la conjecture de Gross-Kuz'min dans K_d/K . On a :*

(i) $H^{(n)}/Y_n$ est un groupe fini et

$$e_n(K_d/K) = e(H^{(n)}/Y_n).$$

(ii) Pour tout n , les groupes $\tilde{I}_i^{(n)}$ engendrent un sous-groupe de $\Gamma_d^{\ell^n}$ d'indice fini. Cet indice est constant ℓ^δ pour n assez grand.

(iii) Les B_n sont Λ_d -sous-modules de $\tilde{X}$ d'indice fini et

$$e(\tilde{X}/B_n) = e_n(K_d/K) - \delta,$$

pour n assez grand.

Preuve : Y_n fixe l'extension maximale abélienne de K_n^c qui est logarithmiquement non-ramifiée sur K_n , donc la théorie ℓ -adique de corps de classes nous dit que cette extension est K_n^{lc} , et le groupe de Galois $\text{Gal}(K_n^{lc}/K_n)$ est juste le groupe de classes logarithmiques, qui est fini sous la conjecture de Gross-Kuz'min. Ce qui donne (i).

Considérons la suite exacte

$$0 \longrightarrow \tilde{X}/B_n \longrightarrow H^{(n)}/Y_n \longrightarrow \Gamma_d^{\ell^n} / \prod \tilde{I}_i^{(n)} \longrightarrow 0.$$

De (i), il suit que l'indice du groupe engendré par les sous-groupes d'inertie logarithmique $\tilde{I}_i^{(n)}$ dans $\Gamma_d^{\ell^n}$ est fini. Soit v un entier tel que $\ell(\Gamma_d/\tilde{I}_i)_{\text{tors}} = 0$ pour $i = 1, \dots, r$. Pour $n \geq v$ on a $\tilde{I}_i^{(n+1)} = (\tilde{I}_i^{(n)})^\ell$ [CM81, Lemma 5.1], donc les indices sont finis et ultimement constants ℓ^δ d'où (ii).

Notons que B_n est un sous-groupe fermé de $\tilde{X}$ qui est stable sur l'action de Γ_d , donc c'est un Λ_d -module. De la suite exacte on déduit que X/B_n est d'indice fini et que

$$e(H^{(n)}/Y_n) = e(\tilde{X}/B_n) + \delta,$$

pour $n \geq v$. On obtient donc (iii). $\square$

Définition 3.4.12. Soit $A_n = [\tilde{X}, H^{(n)}] + \sum_{i=1}^r \Lambda_d[H, \tilde{I}_i^{(n)}] + [H^{(n)}, H^{(n)}]$.

A_n est un sous-module de $B_n = Y_n \cap \tilde{X}$. En fait A_n est bien contenu dans B_n puisqu'on a $[H^{(n)}, H^{(n)}] \subset \tilde{X} \subset H^{(n)}$ car $H^{(n)}/\tilde{X}$ est abélien et en plus $[\tilde{X}, H^{(n)}]$ et les $[H, \tilde{I}_i^{(n)}]$ sont contenus dans $[H^{(n)}, H^{(n)}] \subset B_n$. Si $\tau \in H^{(n)}$ le commutateur $[\tau, x] = (\bar{\tau} - 1)x$ s'exprime comme l'action d'un élément $(\bar{\tau} - 1) \in \Lambda_d$ où $\bar{\tau} \in \Gamma_d^{\ell^n}$, c'est à dire, $[\tilde{X}, H^{(n)}]$ est le produit de l'idéal engendré par les $(\bar{\tau} - 1)$ et $\tilde{X}$, donc $[\tilde{X}, H^{(n)}]$ est un Λ_d -module et il est de même pour les $[H, \tilde{I}_i^{(n)}]$.

Soient ρ, σ, τ des éléments de $H^{(n)}$, alors on a

$$\begin{aligned} [\rho\sigma, \tau] &= \rho\sigma\tau\sigma^{-1}\rho^{-1}\tau^{-1} \\ &= \rho\sigma\tau\sigma^{-1} \underbrace{\tau^{-1}\rho^{-1}\rho\tau}_{\bar{\rho}[\sigma, \tau]} \rho^{-1}\tau^{-1} \\ &= \bar{\rho}[\sigma, \tau] + [\rho, \tau], \end{aligned}$$

donc

$$[\rho\sigma, \tau] \equiv [\rho, \tau] + [\sigma, \tau] \pmod{[\tilde{X}, H^{(n)}]},$$

car $\bar{\rho}[\sigma, \tau] - [\sigma, \tau] = [\rho, [\sigma, \tau]]$. D'où l'on déduit en utilisant la compacité de $H^{(n)}$ et $[\tilde{X}, H^{(n)}]$, que si $c \in \mathbb{Z}_\ell$

$$[\sigma^c, \tau] = c[\sigma, \tau] + x, \quad \text{avec } x \in [\tilde{X}, H^{(n)}].$$

En particulier ceci démontre que $[H^{(n)}, H^{(n)}]$ est stable sous l'action de $\mathbb{Z}_\ell$.

Soient, $\tau_i \in H^{(n)}$ des représentants d'une base de $\Gamma_d^{\ell^n}$. Le $\mathbb{Z}_\ell$ -module engendré par les commutateurs $[\tau_i, \tau_j]$ est compact, alors A_n est la réunion de sous-groupes compacts, il résulte alors que A_n est un sous-groupe fermé de $\tilde{X}$ stable pour l'action de Γ_d , donc il est un Λ_d -sous-module.

Le sous-groupe de $H^{(n)}$ engendré par A_n et les $\tilde{I}_i^{(n)}$ est Y_n . En fait, l'application

$$\begin{aligned} A_n \times \tilde{I}_1^{(n)} \times \tilde{I}_r^{(n)} &\longrightarrow Y_n \\ (x, \tau_1, \dots, \tau_r) &\mapsto x\tau_1 \cdots \tau_r \end{aligned}$$

est continue, et l'image est compact, donc fermée dans Y_n . Comme A_n contient $[H^{(n)}, H^{(n)}]$ et les $[H^{(n)}, \tilde{I}_i^{(n)}]$, l'image est un sous-groupe de H qui contient $[H^{(n)}, H^{(n)}]$ et tous les conjugués des $\tilde{I}_i^{(n)}$ sous l'action de H . Donc l'image est tout Y_n .

Soit $J^{(n)} \subset \tilde{I}_1^{(n)} \times \dots \times \tilde{I}_r^{(n)}$ l'ensemble des $(\tau_1, \dots, \tau_r)$ tels que $\bar{\tau}_1 \cdots \bar{\tau}_r = 1$, donc il existe une application $\mathbb{Z}_\ell$ -linéaire de $J^{(n)}$ sur le quotient B_n/A_n . En effet, il existe un homomorphisme canonique surjective $\tilde{I}_1^{(n)} \times \dots \times \tilde{I}_r^{(n)} \rightarrow Y_n/A_n$, dont la préimage de B_n/A_n est justement $J^{(n)}$. Cette application est $\mathbb{Z}$ -linéaire, mais elle s'étend facilement à une application $\mathbb{Z}_\ell$ -linéaire par la compacité de Y_n .

Il résulte que le groupe $B_n/B_{n+1} + A_n$ est annulé par ℓ . Si l'on prend un élément $u \in B_n/A_n$ on peut l'écrire comme un produit $\tau_1 \dots \tau_r$ avec $\tau_i \in \tilde{I}_i^{(n)}$. L'action de ℓ sur u est

$$\ell u = (\tau_1 \dots \tau_r)^\ell \equiv \tau_1^\ell \dots \tau_r^\ell \pmod{A_n}.$$

Mais les $\tau^\ell \in \tilde{I}_i^{(n+1)}$, donc $\ell u \in B_{n+1} + A_n$.

Or, considérons l'application $\mathbb{Z}_\ell$ -bilinéaire

$$\alpha_n : \Gamma_d^{\ell^n} \times \Gamma_d^{\ell^n} \longrightarrow A_n/[\tilde{X}, H^{(n)}] + \sum \Lambda_d[H, \tilde{I}_i^{(n)}],$$

telle que pour $\bar{\sigma}, \bar{\tau}$ dans $\Gamma_d^{\ell^n}$, et des respectifs relèvements σ, τ dans $H^{(n)}$, $\alpha_n(\bar{\sigma}, \bar{\tau})$ est l'image de $[\sigma, \tau]$ dans $A_n/[\tilde{X}, H^{(n)}] + \sum \Lambda_d[H, \tilde{I}_i^{(n)}]$. L'image de α_n engendre $A_n/[\tilde{X}, H^{(n)}] + \sum \Lambda_d[H, \tilde{I}_i^{(n)}]$. Et ceci, est engendré par $\frac{d(d-1)}{2}$ éléments, les $[\tau_i, \tau_j]$.

Il résulte que le groupe $A_n/A_{n+1} + [\tilde{X}, H^{(n)}] + \sum \Lambda_d[H, \tilde{I}_i^{(n)}]$ est annulé par ℓ^2 .

Le rang de $J^{(n)}$ sur $\mathbb{Z}_\ell$ est majoré comme suit

$$r(J^{(n)}) \leq \dim_{\mathbb{Z}_\ell} \tilde{I}_1 \dots \tilde{I}_r = \sum_{i=1}^r [K_{p_i} : \mathbb{Q}_\ell].$$

Ceci qui implique que $B_n/[\tilde{X}, H^{(n)}] + \sum \Lambda_d[H, \tilde{I}_i^{(n)}] = (B_n/A_n)(A_n/[\tilde{X}, H^{(n)}] + \sum \Lambda_d[H, \tilde{I}_i^{(n)}])$ est engendré sur $\mathbb{Z}_\ell$ par un nombre fini s d'éléments.

Ces dernières observations nous permettront d'utiliser le Lemme 3.4.1 et démontrer le résultat principal, mais avant il faut démontrer qu'il existe une structure sur $\tilde{X}$ à laquelle on va appliquer la théorie des sections précédentes.

Théorème 3.4.16. *Il existe une structure $\mathcal{S}$ sur $\tilde{X}$ telle que*

$$A_n(\mathcal{S}) = [\tilde{X}, H^{(n)}] + \sum \Lambda_d[H, \tilde{I}_i^{(n)}] \quad \text{pour } n \geq v.$$

Preuve : Soit τ_{ij} une base de $\tilde{I}_i^{(v)}$. On a $\bar{\tau}_{ij} = \bar{\sigma}_{ij}^{\ell^v}$ pour $\bar{\sigma}_{ij} \in \Gamma_d - \Gamma_d^\ell$.

Posons $M_{ij} = \Lambda_d[\tau_{ij}, H]$ et soit $\mathcal{S}$ la structure $(v, (\sigma_{ij}, M_{ij}))$. Les $\tau_{ij}^{\ell^{n-v}}$ forment une base sur $\mathbb{Z}_\ell$ des $\tilde{I}_i^{(n)}$ pour $n \geq v$. Il suit que

$$[H, \tilde{I}_i^{(n)}] \subset \sum_j \Lambda_d[H, \tau_{ij}^{\ell^{n-v}}] + [\tilde{X}, H^{(n)}].$$

Alors

$$[\tilde{X}, H^{(n)}] + \sum_i \Lambda_d[H, \tilde{I}_i^{(n)}] = [\tilde{X}, H^{(n)}] + \sum_{i,j} \Lambda_d[H, \tau_{ij}^{\ell^{n-v}}].$$

Soit $\frac{\omega_{ij}^n}{\omega_{ij}^v} = \frac{(\bar{\sigma}_{ij}^{\ell^n} - 1)}{(\bar{\sigma}_{ij}^{\ell^v} - 1)}$, alors $[H, \tau_{ij}^{\ell^{n-v}}] = \frac{\omega_{ij}^n}{\omega_{ij}^v} [H, \tau_{ij}]$.

On sait aussi que $[\tilde{X}, H^{(n)}] = \langle (\bar{\tau} - 1) \rangle_{\bar{\tau} \in \Gamma_d^{\ell^n}} \tilde{X}$. Donc on a bien une structure $\mathcal{S}$ pour $n \geq v$:

$$[\tilde{X}, H^{(n)}] + \sum_i \Lambda_d[H, \tilde{I}_i^{(n)}] = \omega_n \tilde{X} + \sum_{i,j} \frac{\omega_{ij}^n}{\omega_{ij}^v} M_{ij}.$$

□

Théorème 3.4.17.

$$\tilde{e}_n(K_d/K) = \tilde{e}(X/A_n(S)) + O(n).$$

Preuve : Considérons la structure du théorème 3.4.16. On sait que les $B_n/A_n(S)$ sont engendrés par s éléments sur $\mathbb{Z}_\ell$, que les $\tilde{X}/B_n$ sont finis par la suite du théorème 3.4.15 et que les $B_n/B_{n+1} + A_n(S)$ ont ordre borné, puisqu'ils sont engendrés par s éléments et sont annulés par ℓ^3 . Donc par le lemme 3.4.1 on a

$$|e(\tilde{X}/B_n) - e(\tilde{X}/A_n(S))| = O(n),$$

mais $e(\tilde{X}/B_n) + \delta = e(K_d/K)$ par le théorème 3.4.15, et donc

$$e(K_d/K) = e(\tilde{X}/A_n(S)) + O(n).$$

□

Théorème 3.4.18. *Soit K_d/K une $\mathbb{Z}_\ell^d$ -extension d'un corps de nombres K avec $d \geq 2$ telle que $K^c \not\subseteq K_d$. Soit $X = \text{Gal}(L_d/K_d)$ son module logarithmique, χ le polynôme caractéristique de $\tilde{X}$ et $\tilde{\mu}_d$ et $\tilde{\lambda}_d$ les invariants de χ . Alors*

$$\tilde{e}_n(K_d/K) = (\tilde{\mu}_d \ell^n + \tilde{\lambda}_d n + O(1)) \ell^{(d-1)n}.$$

Preuve : Les $r(\tilde{X}/A_n(S))$ sont bornés par le lemme 3.4.1. La structure $\mathcal{S} = (\nu, (\sigma_{ij}, M_{ij}))$ est admissible et les théorèmes 3.4.13 et 3.4.17 nous donnent le résultat. □

Corollaire 3.4.1. *Soit K_d/K une $\mathbb{Z}_\ell^d$ -extension d'un corps de nombres K (qui ne contient pas l'extension cyclotomique K^c de K si $d \geq 2$) et soit $X = \text{Gal}(L_d/K_d)$ son module logarithmique, χ le polynôme caractéristique de $\tilde{X}$ et $\tilde{\mu}_d$ et $\tilde{\lambda}_d$ les invariants de χ . Alors*

$$\tilde{e}_n(K_d/K) = (\tilde{\mu}_d \ell^n + \tilde{\lambda}_d n + O(1)) \ell^{(d-1)n}.$$

Bibliographie

- [BJ16] Karim Belabas and Jean-François Jaulent. The logarithmic class group package in pari/gp. *Pub. Math. Besançon*, 2016.
- [Cas67] J. W. S. Cassels. Global fields. In *Algebraic Number Theory (Proc. Instructional Conf., Brighton, 1965)*, pages 42–84. Thompson, Washington, D.C., 1967.
- [CM81] Albert A. Cuoco and Paul Monsky. Class numbers in $\mathbf{Z}_p^d$ -extensions. *Math. Ann.*, 255(2) :235–258, 1981.
- [CSS03] J. Coates, P. Schneider, and R. Sujatha. Modules over Iwasawa algebras. *J. Inst. Math. Jussieu*, 2(1) :73–108, 2003.
- [DdSMS99] J. D. Dixon, M. P. F. du Sautoy, A. Mann, and D. Segal. *Analytic pro- p groups*, volume 61 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1999.
- [DyDJP⁺05] Francisco Diaz y Diaz, Jean-François Jaulent, Sebastian Pauli, Michael Pohst, and Florence Soriano-Gafiuk. A new algorithm for the computation of logarithmic l-class groups of number fields. *Experiment. Math.*, 14(1) :65–74, 2005.
- [DyDS99] F. Diaz y Diaz and F. Soriano. Approche algorithmique du groupe des classes logarithmiques. *J. Number Theory*, 76(1) :1–15, 1999.
- [FK02] Takashi Fukuda and Keiichi Komatsu. Noncyclotomic $\mathbf{Z}_p$ -extensions of imaginary quadratic fields. *Experiment. Math.*, 11(4) :469–475 (2003), 2002.
- [FW79] Bruce Ferrero and Lawrence C. Washington. The Iwasawa invariant μ_p vanishes for abelian number fields. *Ann. of Math. (2)*, 109(2) :377–395, 1979.
- [Gol75a] R. Gold. Examples of Iwasawa invariants. *Acta Arith.*, 26 :21–32, 1974/75.
- [Gol75b] Robert Gold. Examples of Iwasawa invariants. II. *Acta Arith.*, 26(3) :233–240, 1974/75.
- [Gre73] Ralph Greenberg. The Iwasawa invariants of Γ -extensions of a fixed number field. *Amer. J. Math.*, 95 :204–214, 1973.
- [HM16] Farshid Hajir and Christian Maire. Prime decomposition and the Iwasawa mu-invariant. 2016. Soumis.
- [HW17] D. Hubbard and L. C. Washington. Iwasawa Invariants of Some Non-Cyclotomic $\mathbf{Z}_p$ -extensions. *ArXiv e-prints*, March 2017.
- [Iwa56] Kenkichi Iwasawa. A note on class numbers of algebraic number fields. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 20 :257–258, 1956.
- [Iwa59] Kenkichi Iwasawa. On Γ -extensions of algebraic number fields. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 65 :183–226, 1959.
- [Iwa72] Kenkichi Iwasawa. On the μ -invariants of cyclotomic fields. *Acta Arith.*, 21 :99–101, 1972.

- [Iwa73] Kenkichi Iwasawa. On $\mathbf{Z}_l$ -extensions of algebraic number fields. *Ann. of Math.* (2), 98 :246–326, 1973.
- [Jau85] Jean-François Jaulent. Sur l’indépendance l -adique de nombres algébriques. *J. Number Theory*, 20(2) :149–158, 1985.
- [Jau86] Jean-François Jaulent. *L’arithmétique des l -extensions*. Publications Mathématiques de la Faculté des Sciences de Besançon. Université de Franche-Comté, Faculté des Sciences, Besançon, 1986. Dissertation.
- [Jau87] Jean-François Jaulent. Sur les conjectures de Leopoldt et de Gross. *Astérisque*, (147-148) :107–120, 343, 1987. Journées arithmétiques de Besançon (Besançon, 1985).
- [Jau94] Jean-François Jaulent. Classes logarithmiques des corps de nombres. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 6(2) :301–325, 1994.
- [Jau16a] J.-F. Jaulent. Normes cyclotomiques naïves et unités logarithmiques. *ArXiv e-prints*, September 2016. To be published in Archiv der Mathematik.
- [Jau16b] Jean-François Jaulent. Classes logarithmiques et capitulation. *Funct. Approx. Comment. Math.*, 54(2) :227–239, 2016.
- [Jau16c] Jean-François Jaulent. Sur les normes cyclotomiques et les conjectures de Leopoldt et de Gross-Kuz’mín. *Annales mathématiques du Québec*, pages 1–22, 2016.
- [JMP13] Jean-François Jaulent, Christian Maire, and Guillaume Perbet. Sur les formules asymptotiques le long des $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions. *Ann. Math. Qué.*, 37(1) :63–78, 2013.
- [Lan90] Serge Lang. *Cyclotomic fields I and II*, volume 121 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1990. With an appendix by Karl Rubin.
- [Lan02] Serge Lang. *Algebra*, volume 211 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 2002.
- [Lei17] A. Lei. Estimating class numbers over metabelian extensions. *ArXiv e-prints*, March 2017.
- [Mar77] Daniel A. Marcus. *Number fields*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. Universitext.
- [Mil13] J.S. Milne. Class field theory (v4.02), 2013. Available at www.jmilne.org/math/.
- [Min86] John Victor Minardi. *Iwasawa modules for $\mathbb{Z}_p^d$ -extensions of algebraic number fields*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1986. Thesis (Ph.D.)—University of Washington.
- [Mon81a] Paul Monsky. On p -adic power series. *Math. Ann.*, 255(2) :217–227, 1981.
- [Mon81b] Paul Monsky. Some invariants of $\mathbf{Z}_p^d$ -extensions. *Math. Ann.*, 255(2) :229–233, 1981.
- [Neu86] Jürgen Neukirch. *Class field theory*, volume 280 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [Neu99] Jürgen Neukirch. *Algebraic number theory*, volume 322 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1999. Translated from the 1992 German original and with a note by Norbert Schappacher, With a foreword by G. Harder.

- [NSW08] Jürgen Neukirch, Alexander Schmidt, and Kay Wingberg. *Cohomology of number fields*, volume 323 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2008.
- [Per11] Guillaume Perbet. Sur les invariants d’Iwasawa dans les extensions de Lie p -adiques. *Algebra Number Theory*, 5(6) :819–848, 2011.
- [Ser95] Jean-Pierre Serre. Classes des corps cyclotomiques (d’après K. Iwasawa). In *Séminaire Bourbaki, Vol. 5*, pages Exp. No. 174, 83–93. Soc. Math. France, Paris, 1995.
- [The16] The PARI Group, Bordeaux. *PARI/GP version 2.9.0*, 2016. available from <http://pari.math.u-bordeaux.fr/>.
- [VG14] José-Ibrahim Villanueva-Gutiérrez. Théorie d’Iwasawa. PDF, Institute de Mathématiques de Bordeaux, April 2014. Notes du cours donné par Jean-François Jaulent.
- [Was87] Lawrence C. Washington. Class numbers of the simplest cubic fields. *Math. Comp.*, 48(177) :371–384, 1987.
- [Was97] Lawrence C. Washington. *Introduction to cyclotomic fields*, volume 83 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1997.
- [Wei94] Charles A. Weibel. *An introduction to homological algebra*, volume 38 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.