

## עבודתו המדעית של פרופ' יעקב לויצקי

שמשון אברהם עמיצור

יעקב לויצקי נולד בשנת 1904 בחרסון שבאוקראינה ועלה לארץ בילדותו יחד עם הוריו. את השכלתו המתמטית רכש באוניברסיטת גטינגן שבגרמניה ובשנת 1929 קבל בה את התאר ד"ר לפילוסופיה. זמן קצר שמש כעוזר מדעי באוניברסיטת קיל ובמשך שנתיים היה חבר-מחקר באוניברסיטת ייל שבארצות-הברית. לאחר מכן נתמנה כעוזר מדעי במכון למתמטיקה של האוניברסיטה העברית בירושלים ושרת בה כ-25 שנה עד יום מותו, י"ג אדר תשט"ז.

פעילותו המדעית של לויצקי נמשכה בעשרים ושבע שנים ואף זו לא ברציפות ולא בתנאי מחקר שקטים. מאורעות הרמים של שנות 9-1936, מלחמת העולם השנייה שנתקה אותו מחבריו למחקר שעמם עמד בקשר, מלחמת העצמאות ובעקב מחלתו הקשה אשר רתקה אותו למטתו כאפס מעשה לתקופות ממושכות ואשר הכריעתו לבסוף, גרמו להפסקות רציניות במחקריו. אף על פי כן השיג לויצקי תוצאות נכבדות באלגברה המודרנית, אשר מקצתן העכו להיות נכסי צאן ברזל של תורת החוגים ומקצתן משמעות, ותמשכנה לשמש עוד תקופה ארוכה, מקור למחקרים חדשים. הוא זכה שכמה מהשגיו נחשבים כיום לתוצאות קלאסיות של תורת החוגים ומופיעים בכל ספר למוד ומחקר בנושא זה.

נשתדל לסקר במאמר זה את השגיו המדעיים בתוך המסגרת הכללית של

התפתחות האלגברה המודרנית בכלל ותורת החוגים בפרט.

בהמשך התפתחות הארתמטיקה של המספרים המרוכבים הופיעו במתמטיקה הקוטרניונים והמספרים ההיפרקומפלכסיים, אשר במנוח המוררני אינם אלא אלגבראות סופיות (מסמך סופי) מעל המספרים הממשיים. מחקה האלגבראות הסופיות מעל שדה כללי החל רק בראשית המאה הנוכחיה ומקובל לראות את שנת 1907, שנת הופעת התיזה של Wedderburn, כתאריך הולדת תורת האלגבראות. ההתפתחות המהירה של האלגברה המודרנית בראשית המאה הנוכחית על ידי האםכולה של המתמטיקאית היהוריה Emmy Noether והשתלטות מושג האידאל בתחום זה, הביאו במהרה לתורת "החוגים המקימים תנאי מכסימוס ומינימוס לגבי אידאליים", שהנם הפשטה של ה"אלגבראות הסופיות". תורה זו היא מסר תורת החוגים המודרנית וראשיתה נעוצה בעבודה של Artin שנתפרסמה ב-1927.

באותה תקופה שמע לויצקי הרצאות באלגברה מפי הגברת נטר ובהשפעתה החל אף הוא לטפל בתורת החוגים. צעדו הראשון היה חקירת החוגים החלקיים של החוגים הפשוטים למחצה בכלל וחוגי הסטריצות בפרט. במיוחד יצוין משפטו "החוגים הניליים החלקיים של חוג הסטריצות מעל חוג עם חלוק הם נילפוטנטיים". משפט זה מסך אליו את תשומת לבם של מתמטיקאים רבים מאז 1931 ועד היום הזה וזכה למספר נכר של הכללות. נציין כאן שהוכחתו המקורית של לויצקי למשפט זה היתה המקור ל"לכת פייטינג" המפורסמת.

לאחר סכן עבר לויצקי לארצות-הברית וכאן עבר לתחום חדש: בעית האוטומוורפיסמים של האלגבראות והמכפלה המכללת. בעבודותיו [3], [4] הונח היסוד (כפי שמעיד על כך Öre) לתורת גלואה בחוגים לא קומוטטיביים ולויצקי עצמו אף כתב מאמר גדול בנושא זה. מאמר זה, שנשאר בין כתביו, לא יצא לאור, כי בינתיים פרסמו Shoda ו-Nakayama את מרבית התוצאות בעתונות היפנית.

בראשית התקופה הירושלמית תרם לויצקי את חלקו עם מתמטיקאים רבים אחרים בפתוחם והבהרתם של מושגי הדרגה של מטריצה ושל מודול מעל שדה לא קומוטטיבי, מושגים שהם כיום נחלתו של כל תלמיד מתחיל באלגברה. בטרם נעבר להתקופה הבאה בעבודתו של לויצקי נעמד בקצרה על המשפטים היסודיים של ודרברן בתורת האלגבראות ועל המטרות של תורת החוגים כפי שעוצבו באותה תקופה.

משפטי המבנה היסודיים של ודרברן אומרים שאם  $A$  היא אלגברה טופית מעל שדה, אזי: א)  $A$  מכילה אידאל נילפוטנטי מכסימלי  $N$  (הרדיקל) המכיל את כל האידאלים החד-צדדיים הנילפוטנטיים של  $A$ . ב) חוג-המנה  $A/N$  הוא אלגברה סופית בלי אידאלים נילפוטנטיים (=פשוטה למחצה) והיא סכום ישר של מספר סופי של אלגבראות פשוטות. ג) כל אלגברה סופית פשוטה אימוורפית לחוג כל המטריצות מסדר נתון מעל חוג עם חלוק. משפטי ודרברן נחשבים כאבסטרס למשפטי מבנה בתורת החוגים ואחת המטרות החשובות של תורת החוגים היתה להכליל את משפטי ודרברן לחוגים כלליים.

בשנת 1927 הוכיח Artin שמשפטי ודרברן קימים בחוגים עם תנאי המינימום והמכסימום לגבי אידאלים ימניים ובשנת 9-1938 הוכיחו הופקינס ולויצקי באפן בלתי תלוי ובשיטות שונות את קיום משפטי ודרברן בחוגים המקימים את תנאי המינימום בלבד לגבי אידאלים חד-צדדיים (הופקינס שפל באידאלים שמאליים ולויצקי עסק באידאלים ימניים). משפטים אלו של הופקינס ולויצקי נחשבים כיום כתוצאות הקלסיות של תורת החוגים. מאמרו של לויצקי בנושא זה הופיע זמן קצר לאחר הופעת עבודתו של הופקינס, אך מן הראוי לצין שלויצקי שלח את מאמרו לאירופה לאחד העורכים של העתון *Compositio Mathematica*, אשר בינתיים עבר לארצות-הברית. כתב-היד, כנראה, אבד בדרך והוא הוצרך לשלחו שנית לעורך אחר וזה גרם לאחור בפרסום עבודתו. תוצאות שלמות בנדון זה, דהינו תנאים הכרחיים ומספיקים לקיום משפטי ודרברן, נתנו על ידי לויצקי במאמר קצר מאד ויפה ([11]) בשנת 1944.

בנסיון להכליל את משפטי ודרברן לחוגים כלליים נתגלה שתכונת הנילפוטנטיות אינה מסלאת בחוגים כלליים את התפקיר החשוב שיש לה במשפטי ודרברן. במשך תקופה ארוכה נעשו נסיונות למציאת תחליף לתכונה זו. התחליף הנדרש הוא תכונה  $E$  של חוגים אשר עבורה כל חוג  $R$  יכיל אידאל מכסימלי (הרדיקל)  $N_E$  בעל התכונה  $E$  ואשר חוג-המנה  $R/N_E$  לא יכיל אידאלים  $0 \neq$  בעלי אותה תכונה. התחליף הראשון המופיע בספרות המתמטית, הוא ה"נילפוטנטיות המקומית", נתגלה על ידי לויצקי ([10]) והרדיקל המגזר בעזרתו ירוע כיום "הרדיקל של לויצקי".

הכנסת ה"נילפוטנטיות המקומית" (או ה"סמי-ניפוטנטיות", כפי שנקראה במקור [11]) היתה גם הנסיון הראשון באלגברה של הפעלת "תכונה מקומית" במכשיר לחקירת חוגים. עצם המושג של "תכונה מקומית" הופיע זמן קצר (1941) לפני פרסום עבודתו של לויצקי, בעבודה של המתמטיקאי הרוסי קורוש (שהובאה לתשומת לבו של לויצקי רק אחר מלחמת העולם השנייה). פרי ראשון של השמוש בתכונת הנילפוטנטיות המקומית היה פתרון בעיית Koethen ([12]). לאחר מכן נמצאו עוד שמושים רבים לתכונה זו, ביחוד בקשר לבעיית קורוש שנזכרה להלן.

מתוך מחקרו על תכונת הנילפוטנטיות המקומית עורר לויצקי את הבעיה: "האם כל חוג נילי הנוצר על ידי נספר סופי של אברים הוא נילפוטנטי?". בעיה זו היא בעלת חשיבות עקרונית בהתפתחות תורת החוגים. בתקופה מאוחרת יותר (אחר מלחמת העולם השנייה) נתברר שבעיית לויצקי היא מקרה פרטי (במובן מסוים) של בעיה שהציג קורוש כשאלה אנלוגית בתורת החוגים לבעיית Burnside המפורסמת בתורת החבורות. מתמטיקאים רבים טפלו עד כה בשתי בעיות אלו, אך שרם נמצא להן פתרון. התוצאות המרחיקות לכת ביותר בכיוון לפתרון בעיית קורוש ולויצקי הושגו על ידי לויצקי בשנת 1954 ([32]).

בתחום המחקר על הרדיקלים נזכיר את המאמר [22] המכיל את התוצאה המפתיעה על זהות הרדיקלים של McCoy ושל Baer. מעניין שגם תוצאה זו הושגה באופן בלתי תלוי על ידי המתמטיקאי היפני Nagata. מאמרו של לויצקי [20] על זהויות בחוגים נתנה דחיפה גדולה לפתוח פרק זה בתורת החוגים. באותו זמן החל לויצקי לשפל בבעיית הזהות המינימלית של חוג המטריצות אשר העטיקה מספר נכר של מתמטיקאים. הוא אף הסב את תשומת לב כותבי הטורים הללו לבעיה זו ובמאמץ מסותף עלה בידם לפתור את הבעיה. השגים אלו זכוהו בשנת 1953 בפרס ישראל (הראשון) למדעים מדויקים.

בתקופה האחרונה, החל משנת 1950, גברה מאד פעילותו המתמטית. עבודותיו האחרונות הן מאמרים ארוכים המצטיינים בחן מתמטי מיוחד ובדיון סקיף על חוגים בעלי תכונות מסוימות, כגון האלגבראות האלגבריות. במחקריו הגדולים על האלגבראות האלגבריות ועל חוגי-I מתגלית החשיבות של האידמפוטנטים והאברים הניליים של חוגים והיחס ההדדי בין שני סוגי אברים אלו. על נושא זה נתבקש לויצקי לכתוב ספר עבור הוצאה גרמנית, אך הבקשה נדחתה מסבות לאומיות.

נסים בכמה מלים על לויצקי כמחבר מאמרים פופולריים. עוד כהיותו כבן 17 (תרפ"א) כתב כמה מאמרים במדע פופולרי באחד העתונים הראשונים שהופיעו בשפה העברית לענייני ספרות ומדע ("לתלמידים"). נושאי המאמרים הללו היה מתחום מדעי האסטרונומיה והביולוגיה. בפי שידוע לכותבי הטורים הללו נתכוון לויצקי להיות כימאי ורק בהשפעת מוריו וידידיו עבר לתחום המתמטיקה. מיום שובו לירושליים עשה רבות להפצת המתמטיקה והיה היוזם להוצאת עתונות מתמטית בעברית. הוא כתב גם כמה מאמרים פופולריים על נושאים מתמטיים ב"דפים למתמטיקה" וב"שכניקה ומדע". מאמריו אלו מצטיינים בבהירות רבה ובהצגה פשוטה ונאה של הנושאים מטפל בהם. הערכים המתמטיים שכתב עבור האנציקלופדיה העברית זכו לציון מיוחד על ידי מנקרים רבים.